1-SYMETRIE CENTRALE

1-1- DEFINITION

Soit I un point du plan, M et M' deux point du plan. Le point M' est le symétrique de M par rapport au point M, si et seulement si:

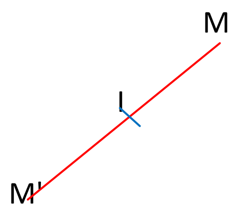
i- si M=I, alors M'=I, et I est un point invariant par la symétrie centrale

ii- si $M \neq I$, alors le point I est le milieu du segment [MM']

la transformation qui fait correspondre M à M' est appelée symétrie centrale de centre I, et se note S_I .

$$S_I : P \to P$$
$$M \to S_I(M) = M'$$

$S_I(M) = M' \ \ est \ \ équivalent \ \ à \ \ \overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{IM}$



1-2- PROPRIETE

Soit S_I une symétrie centrale de centre I

i- la symétrie centrale conserve la distance:

$si \ \ S_I(A) = A' \ \ et \ \ S_I(B) = B' \ \ alors \ \ \ AB = A'B'$, et on a aussi $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$

ii- la symétrie centrale conserve le coefficient de la colinéarité des vecteurs:

$si \ \ S_I(A) = A' \ , \ S_I(B) = B' \ \ et \ \ \ S_I(C) = C' \ \ et \ \ \overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC} \ \ \ alors \ \ \overrightarrow{A'B'} = \alpha\overrightarrow{A'C'}$

iii- la symétrie centrale conserve la mesure des angles géométrique:

$si \ \ S_I(A) = A' \ , \ S_I(B) = B' \ \ et \ \ \ S_I(C) = C' \ \ \ \ \ alors \ \ (A\hat{B}C) = (A'\hat{B}'C')$

iv- L'image d'un cercle (C) de centre A et de rayon R par la symétrie centrale est un cercle (C') de centre $A' = S_I(A)$ et de rayon R

2-SYMETRIE AXIALE

2-1- DEFINITION

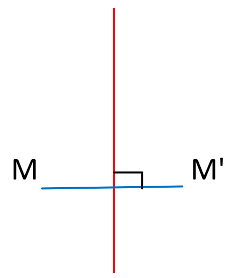
Soit (D) une droite, M et M' deux points du plan (P). Le point M' est le symétrique de M par rapport à la droite (D) si et seulement si:

i- $si \ \ M \in (D) \ \ alors \ \ M = M'$, (D) est l'ensemble des points invariants par la symétrie axiale

ii- $si \ \ M \notin (D) \ \ alors \ \ (D) \ \ est\,la\,médiatrice\,du\,segment \left[MM'\right]$. La transformation qui fait correspondre M à M' est appelée symétrie axiale d'axe (D), et notée S_D

$$S_D : (P) \to (P)$$
$$M \to S_D(M) = M'$$

$S_D(M) = M'$ est équivalent à (D) est la médiatrice de [MM']



2-1- PROPRIETE

Soit S_D une symétrie axiale d'axe (D) i- la symétrie axiale conserve la distance:

$si\ \ S_D(A) = A'\ \ et\ \ S_D(B) = B'\ \ alors\ \ AB = A'B'$

ii- la symétrie axiale conserve le coefficient de colinéarité des vecteurs:

$si\ \ S_D(A) = A'\ ,\ \ S_D(B) = B'\ et\ S_D(C) = C'\ \ et\ \ \overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC}\ \ alors\ \ \overrightarrow{A'B'} = \alpha\overrightarrow{A'C'}$

iii- la symétrie axiale conserve la mesure des angles géométrique:

$si\ \ S_D(A) = A'\ ,\ S_D(B) = B'\ et\ \ \ S_D(C) = C'\ \ \ \ alors\ \ (A\hat{B}C) = (A'\hat{B}'C')$

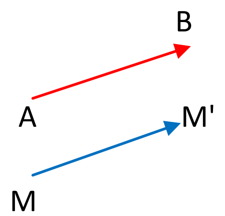
iv- L'image d'un cercle (C) de centre A et de rayon R par la symétrie axiale S_D est un cercle (C') de centre $A' = S_D(A)$ et de rayon R

<u>3- LA TRANSLATION</u>

<u>3-1- DEFINITION</u>

Soient A et B deux points donnés du plan (P), M et M' deux points du plan (P). Le point M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, si et seulement si $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.
La transformation qui fait correspondre M à M' est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, et se note $t_{\overrightarrow{AB}}$.

$$\begin{aligned} t_{\overrightarrow{AB}} : (P) &\to (P) \\ M &\to t_{\overrightarrow{AB}}(M) = M' \end{aligned}$$



$$t_{\overrightarrow{AB}}(M) = M'\ est\ équivalent\ à\ \ \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$$

<u>3-2- PROPRIETE</u>

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$

i- La translation conserve la distance: $si\ \ t_{\vec{u}}(A) = A'\ \ et\ \ t_{\vec{u}}(B) = B'\ \ alors\ \ AB = A'B'$

et aussi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$

ii- La translation conserve le coefficient de colinéarité des vecteurs:

$si\ \ t_{\vec{u}}(A) = A'\ ,\ \ t_{\vec{u}}(B) = B'\ et\ t_{\vec{u}}(C) = C'\ \ et\ \ \overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC}\ \ alors\ \ \overrightarrow{A'B'} = \alpha\overrightarrow{A'C'}$

iii- La translation conserve la mesure des angles géométrique:

$si\ \ t_{\vec{u}}(A) = A'\ ,\ t_{\vec{u}}(B) = B'\ et\ \ \ t_{\vec{u}}(C) = C'\ \ \ \ alors\ \ (A\hat{B}C) = (A'\hat{B}'C')$

iv- L'image d'un cercle (C) de centre A et de rayon R par la translation $t_{\vec{u}}$ est un cercle (C') de centre $A' = t_{\vec{u}}(A)$ et de rayon R

<u>4- EXERCICE</u>

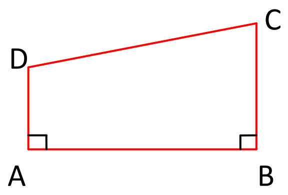
<u>EX1</u>

Soit ABCD un quadrilatère, construire l'image de ABCD par:

i- la symétrie axiale d'axe la droite (BC)

ii- la translation $t_{\vec{u}}\ \ de\ vecteur\ \ \vec{u} = 2\overrightarrow{AB}$

iii- la symétrie centrale de centre I milieu du segment [DC]



<u>EX2</u>

Soit ABC un triangle et S_A la symétrie centrale de centre A
1- construire D et E les images respectifs de B et C par la symétrie axiale S_A
2-déterminer la nature du quadrilatère BCDE
3- Si ABC est un triangle rectangle et isocèle en A, déterminer la nature du BCDE

EX 3

Soit A et B deux points différents, et f la transformation qui fait correspondre le point M à M' tel que $f(M) = M' \ est \ équivalent \ à \ \ 3\overrightarrow{MM'} - \overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

1- déterminer le point invariant I par la transformation f

2-exprimer $\overrightarrow{IM'} \ en \ fonction \ de \ \overrightarrow{IM}$

3- en déduire la nature de f

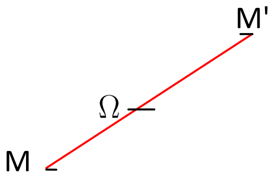
5- L'HOMOTHETIE

5-1- DEFINITION

Soit Ω un point du plan (P) et k un réel non nul. L'homothétie h de centre Ω et de rapport k est la transformation du plan qui fait correspondre M à M' définie par: $\overrightarrow{\Omega M'} = k \cdot \overrightarrow{\Omega M}$
et on écrit $h(M) = M'$ et on note Ω $h(\Omega, k)$.

$$h(\Omega, k) : (P) \to (P)$$
$$M \to h(\Omega, k)(M) = M'$$

$$h(M) = M' \ est \ \ équivalent \ à \ \ \overrightarrow{\Omega M'} = k \cdot \overrightarrow{\Omega M}$$



5-2- PROPRIETE CARACTERISTIQUE DE L'HOMOTHETIE

Soit k un réel non nul et différent de 1, la transformation h est une homothétie de rapport k si et seulement si: $si \ h(M) = M' \ et \ \ h(N) = N' \ \ alors \ \ \overrightarrow{M'N'} = k \cdot \overrightarrow{MN}$

5-3- PROPRIETE

L'homothétie h ne conserve pas la distance:

$$si \ h(M) = M' \ \ et \ \ h(N) = N' \ \ \ alors \ M'N' = \left|k\right| MN$$

5-4- PROPRIETE

L'homothétie h conserve le coefficient de colinéarité des vecteurs:

$$si \ h(A) = A' \ , \ h(B) = B' \ , \ \ h(C) = C' \ et \ \ \overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AC} \ alors \ \ \overrightarrow{A'B'} = \alpha \overrightarrow{A'C'}$$

5-5- PROPRIETE

L'homothétie conserve la mesure des angles géométriques:

$$si \ h(A) = A' \ , \ h(B) = B' \ et \ \ h(C) = C' \ alors \ \ \ (A\hat{B}C) = (A'\overset{\wedge}{B'}C')$$

5-6- PROPRIETE

1-L'image d'une droite (D) par l'homothétie h est une droite (D') tel que (D)//(D')
2- L'image d'un cercle (C) de centre A et de rayon R par l'homothétie h de rapport k est un cercle de centre $A' = h(A) \ \ et \ \ de \ \ rayon \ \ \ R' = \left|k\right| R$