1- POLYNOMES DE DEGRE N

1-1- DEFINITION

1-Soit x un réel, considérons l'expression suivante:

$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ...+a_0$, où $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ sont des réels donnés et $a_n \neq 0$, P(x) est appelé polynôme de degré n ($d^\circ P = n$), les nombres $a_i\ (0 \leq i \leq n)$ sont appelés les coefficients du monôme de degré i

2-Le polynôme P est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, le polynôme nul n'a pas de degré

3- Tout polynôme P qui s'écrit sous forme de $P(x)=ax+b$, est appelé binôme

4- Tout polynôme P qui s'écrit sous forme de $P(x)=ax^2+bx+c$, est appelé trinôme

5- Tout polynôme P qui s'écrit sous forme de $P(x)=a_i x^i$ où $a_i \neq 0$ est appelé monôme de degré i

1-2- EXERCICE

Déterminer parmi les expressions suivantes celles qui sont des polynômes et leurs degrés

$P(x)=\frac{1}{2}x^4+3x^3-5x^2+1$, $Q(x)=2x^5+3|x|-5$

$R(x)=7x^3-6x+3\sqrt{x}$, $S(x)=5x^6-2x^3+\frac{2}{x}-12$

$L(x)=0x^9-2x^4+3x-45$

2-LES OPERATIONS SUR LES POLYNOMES

2-1- PROPRIETE

Considérons les polynômes

$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ *et* $Q(x)=b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ...b_0$

i- $P(x)+Q(x)$ est un polynôme tel que $d^\circ(P+Q) \leq \sup(d^\circ P, d^\circ Q)$

ii- $P(x)\times Q(x)$ est un polynôme tel que $d^\circ(P\times Q) = d^\circ P + d^\circ Q$

iii- Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\alpha P(x)$ est un polynôme tel que $d^\circ(\alpha P) = d^\circ P$

2-2- EXERCICE

1-Soient $P(x)=5x^4-3x^2+4$ *et* $Q(x)=-5x^4+4x^3+x+3$

Calculer $P(x)+Q(x)$ et déterminer son degré

2- Soient $P(x)=x^5-2x^3+x+1$ *et* $Q(x)=3x^2+12$

i- calculer $P(x)+Q(x)$ et déterminer son degré

ii- calculer $P(x)\times Q(x)$ et déterminer son degré

3- EGALITE DE DEUX POLYNOME

3-1-PROPRIETE

Deux polynômes sont égaux si les coefficients de leurs monômes du même degré sont égaux

3-2- EXERCICE

Considérons les polynôme $P(x)=3x^4-2x^3+7x^2-5x-3$ et

$Q(x)=(x-1)(ax^3+bx^2+cx+d)$, où a, b, c et d sont des réels, déterminer a, b, c et d pour que $P(x)=Q(x)$

4-LA DIVISION PAR (x-a)

4-1- PROPRIETE

Soit P(x) un polynôme de degré n $(n \geq 1)$, et a un réel, il existe un unique polynôme Q(x) de degré (n-1) tel que: $P(x) = (x-a)Q(x) + P(a)$

i- Q(x) est appelé le quotient de la division euclidienne de P(x) par (x-a)

ii- P(a) est appelé le reste de la division euclidienne de P(x) par (x-a)

4-2- EXEMPLE

Soit $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 1$, calculons $P(2) = -3$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 4x^2 + 3x - 1 & x-2 \\ \cline{2-2}
-(x^3 - 2x^2) & x^2 - 2x - 1 \\ \cline{1-1}
-2x^2 + 3x - 1 & \\
-(-2x^2 + 4x) & \\ \cline{1-1}
-x - 1 & \\
-(-x + 2) & \\ \cline{1-1}
-3 &
\end{array}
$$

4-3-EXERCICE

Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de P(x) par (x-a) dans les cas suivants:

$i- \quad P(x) = 3x^5 - 2x^3 + 3x - 11 \quad et \quad a = -1$

$ii- \quad P(x) = 6x^4 + 5x^3 - 4x + 3 \quad et \quad a = -2$

$iii- \quad P(x) = x^3 - 15x - 4 \quad et \quad a = 4$

4-4-RACINE D'UN POLYNOME

4-4-1- DEFINITION

Soit P(x) un polynôme de degré n $(n \geq 1)$, et a un réel. On dit que a est une racine du polynôme P(x) si $P(a) = 0$

4-4-2- PROPRIETE

Soit P un polynôme de degré n $(n \geq 1)$ et a un réel, a est une racine du polynôme P si et seulement s, il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x-a)Q(x)$, et on dit que P(x) est divisible par (x-a)

4-4-3- EXERCICE

1- Soit $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x + 36$

i- montrer que (-2) est une racine de P(x)

ii- déterminer Q(x) tel que $P(x) = (x+2)Q(x)$

2- Soit $P(x) = 3x^3 - 6x^2 - x + 2$

i- montrer que 2 est une racine de P(x)

ii- déterminer Q(x) tel que $P(x) = (x-2)Q(x)$

iii- résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

iv- résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) > 0$