1-LE PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS

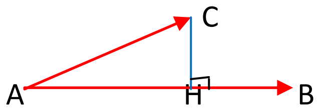
1-1- DEFINITION

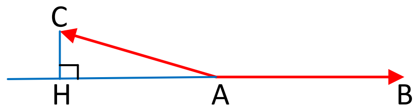
Soient $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}\ et\ \vec{v} = \overrightarrow{AC}$, H est la projection orthogonale du point C sur la droite (AB). Le produit scalaire de $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ est le nombre réel qu'on note $\vec{u}\cdot\vec{v}$, et qui est définie par :

i- $si\ \overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AH}$ ont le même sens alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = AB \times AH$

ii- i- $si\ \overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AH}$ ont des sens opposés alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = -AB \times AH$

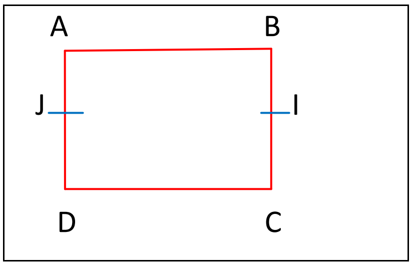
et on écrit $\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$





1-2- EXEMPLE

Soit ABCD un carré de côté 4 cm, et soit I le milieu du segment [BC]. Calculons les produits scalaires suivants :



i- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = AB^2 = 16$, car B est la projection orthogonale de du point I sur la droite (AB)

ii- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BB} = 0$, B est la projection orthogonale de I sur (AB)

iii- $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{JD} = AD \times JD = 4 \times 2 = 8$, où J est la projection orthogonale du point I sur la droite (AD)

1-3- L'EXPRESSION TROGONOMETRIQUE DU PRODUIT SCALAIRE

1-3-1- PROPRIETE

Si $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ deux vecteurs non nuls, tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}\ et\ \vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors on a:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\ B\hat{A}C$$

1-3-2- EXERCICE

1-Soit ABC un triangle tel que $AB = 3\ ,\ AC = 4\ et\ \ B\hat{A}C\ = \dfrac{2\pi}{3}$, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

2- Soit EFG un triangle tel que $EF = 5\ ,\ EG = 3\ et\ \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} = -8$, calculer $\cos\ F\hat{E}G$

1-4-REGLE DE CALCUL

1-4-1- PROPRIETE

Soient $\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ et\ \vec{w}$ trois vecteurs, et $k \in \mathbb{R}$, on a:

i- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

ii- $\vec{u}\cdot\ \vec{v}+\vec{w}\ = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

iii- $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$

iv- $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 \ et \ \sqrt{\vec{u}^2} = \left\|\vec{u}\right\| \neq \vec{u}$

v- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$

vi- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$

vii- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

viii- si $\vec{u} \ et \ \vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, et on écrit $\vec{u}\perp\vec{v}$

<u>1-4-2-EXERCICE</u>

1- Soient $\vec{u} \ et \ \vec{v}$ deux vecteurs tels que: $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3 \ et \ \left\|\vec{u}\right\| = 2$, $\left\|\vec{v}\right\| = 5$, calculer

$(4\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+3\vec{v})$, $\left(\frac{1}{2}\vec{u}+2\vec{v}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{u}-2\vec{v}\right)$, $(3\vec{u}-2\vec{v})^2$ et $(\vec{u}+\sqrt{2}\cdot\vec{v})^2$

2- Soit ABC un triangle tel que $AC = 3$, $AB = 1 \ et \ (C\hat{A}B) = \frac{2\pi}{3}$, et soit I le milieu du segment [AB]

a- calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

b- soit E un point tel que $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$, montrer que $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

c- calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$, et montrer que $(AB) \perp (IE)$

<u>2- RELATION METRIQUE DANS UN TRIANGLE</u>

<u>2-1- PROPRIETE</u>

Soit ABC un triangle, on a: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{BC}^2\right)$

<u>Démonstration</u>

on a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

<u>2-2- EXERCICE</u>

1- Soit EFG un triangle tel que $FG = 3$, $EG = 1 \ et \ EF = \sqrt{10}$, calculer $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}$ et montrer que $(EG)\perp(FG)$

2- soit ABC un triangle tel que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -3$, $AB = 2\sqrt{3} \ et \ AC = 1$, calculer BC et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

<u>2-3- THEOREME DE KACHI</u>

<u>2-3-1- PROPRIETE</u>

Soit ABC un triangle , on a:

$i- \quad BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC \times \cos \ B\hat{A}C$

$ii- \quad AB^2 = CB^2 + CA^2 - 2\times CB\times CA \times \cos \ A\hat{C}B$

$iii- \quad AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2\times BA\times BC \times \cos \ A\hat{B}C$

Démonstration: on utilise $\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}^{\ 2}$ et $\overrightarrow{BC}^2 = BC^2$

2-3-2- EXERCICE

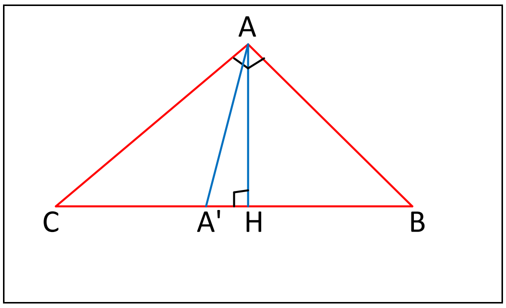
Soit EFG un triangle tel que $F\hat{E}G = \dfrac{\pi}{4}$, $EG = 5\sqrt{2}$ et $EF = 7$, calculer

FG et $\cos \ E\hat{G}F$

2-4-RELATION METRIQUE DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

2-4-1- PROPRIETE

Soit ABC un triangle , A' le milieu du segment [BC] et H la projection orthogonale de A sur (BC). ABC est triangle rectangle en A, s'il vérifie l'une des propriétés suivantes:



i- $AB^2 + AC^2 = BC^2$

ii- $AA' = \dfrac{1}{2}\times BC$

iii- $BA^2 = BH \times BC$

$CA^2 = CH \times BC$

iv- $AH^2 = HB \times HC$

Démonstration :

Pour démontrer

-(i) on utilise $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

-(ii) on utilise $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

-(iii) on utilise $\overrightarrow{BA}^2 = \overrightarrow{BA}\cdot\ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CA}^2 = \overrightarrow{CA}\cdot\ \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$

-(iv) on utilise $\overrightarrow{AH}^2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} \ \cdot\ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}$

2-4-2-EXERCICE

Soit ABC un triangle rectangle en A, H est la projection orthogonale de A sur (BC) tel que

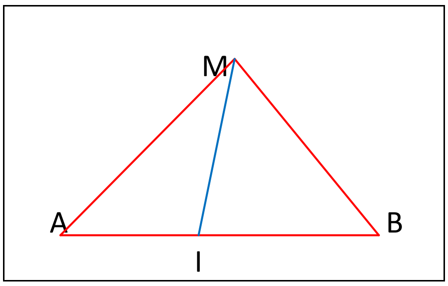
$AH = 2$ et $A\hat{B}C = \dfrac{\pi}{3}$, calculer AB, AC, BC, BH et CH

2-5-THEOREME DE LA MEDIANE

2-5-1- PROPRIETE

Soient A et B deux points du plan, I le milieu du segment [AB], et M un point du plan, on a:

i- $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}^2 - \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2$



ii- $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$

iii- $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$

démonstration: on a $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$,

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$$

Donc

$$= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}$$

$$= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2$$

Puisque $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{IA}^2 = \overrightarrow{IB}^2 = \frac{AB^2}{4}$, alors $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$

2-5-2-EXERCICE

Soit EFG un triangle tel que $FG = 5$, $EG = 1$, $EF = 4\sqrt{5}$, et soit J le milieu du segment [FG], K est la projection orthogonale de G sur (EF), calculer EJ , $\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{GF}$ et KJ

3- SURFACE D'UN TRIANGLE

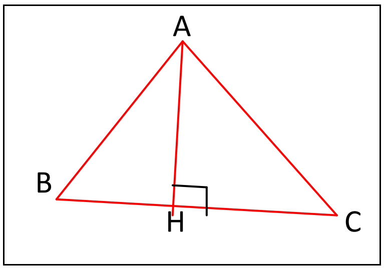
3-1- PROPRIETE

Soit ABC un triangle et S sa surface, on a:

$$S = \frac{1}{2}AB\times AC\times\sin\hat{A} = \frac{1}{2}BA\times BC\times\sin\hat{B} = \frac{1}{2}CA\times CB\times\sin\hat{C}$$

$$S = \frac{1}{2}BC\times AH = \frac{1}{2}BC\times CA\times\sin\hat{C} = \frac{1}{2}BC\times BA\times\sin\hat{B}$$

Parce que $AH = CA\times\sin\hat{C} = BA\times\sin\hat{B}$



3-2-EXERCICE

1- soit ABC un triangle tel que $BC = 5\sqrt{3}$, $AB = AC$ et $\hat{B} = \frac{\pi}{6}$, calculer la surface du triangle ABC

2- calculer la surface du parallélogramme EFGH tel que

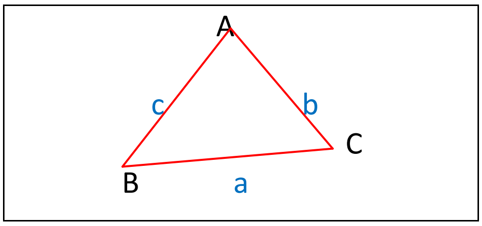
$EF = 5$, $FG = 7$ et $E\hat{F}G = \frac{2\pi}{3}$

4- RELATION ENTRE LES SINUS DES ANGLES D'UN TRIANGLE

4-1- PROPRIETE

Soit ABC un triangle , on pose $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$, et S sa surface , on a:

$$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin(\hat{A})}{a} = \frac{\sin(\hat{B})}{b} = \frac{\sin(\hat{C})}{c}$$



4-2-EXERCICE

Soit ABC un triangle tel que: $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$, $\hat{B} = \frac{\pi}{4}$ et $AC = 4$

1- calculer AB et BC

2- calculer la surface du triangle ABC