1- EQUATION DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE

1-1- DEFINITION

On appelle équation du premier degré à une inconnue, toute équation qui s'écrit sous forme: $ax+b=0$ où a et b sont des réels donnés et x un réel appelé inconnue de l'équation

1-2- PROPRIETE

Soit dans $\mathbb{R}$ l'équation $ax+b=0$ et S l'ensemble des solutions

i- $si\ \ a=0\ et\ \ b=0\ alors\ \ \ S=\mathbb{R}$

ii- $si\ \ a=0\ \ et\ \ b\neq 0\ \ \ alors\ \ \ S=\varnothing$

iii- $si\ \ a\neq 0\ \ \ \ \ alors\ \ \ \ S=\left\{\dfrac{-b}{a}\right\}$

1-3- EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$i-\ \ \ \dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{3x+2}{2}=1$

$ii-\ \ \ 3(x+4)-5(x+3)=-2x+1$

$iii-\ \ \ 2x+3-3(x+1)=-x$

$iv-\ \ \ (3x-4)(5x+1)-2(3x-4)(1-x)=0$

$v-\ \ \ \dfrac{3x+4}{2x+1}-2=0$

2-INEQUATION DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE

2-1- DEFINITION

On appelle inéquation du premier degré à une inconnue; toute inéquation qui s'écrit sous forme: $ax+b\leq 0;\ ax+b\geq 0;\ ax+b<0;\ ax+b>0$, où a et b des réels donnés et x est l'inconnue

2-2- PROPRIETE

Soit l'inéquation $ax+b<0\ \ dans\ \ \mathbb{R}$ et S l'ensemble des solutions

$i-\ \ si\ \ a=0\ et\ \ b\geq 0\ \ alors\ \ S=\varnothing$

$ii-\ \ si\ \ a=0\ et\ \ b<0\ \ alors\ \ S=\mathbb{R}$

$iii-\ \ si\ \ \ a>0\ \ alors\ \ S=]-\infty,-\dfrac{b}{a}[$

$iv-\ \ si\ \ a<0\ \ \ alors\ \ \ S=]-\dfrac{b}{a},+\infty[$

2-3- EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

$i-\ \ \ \dfrac{2x-1}{4}-\dfrac{3-x}{5}<2$

$ii-\ \ \ 3(5x+3)-4(3x+2)\geq 6$

2-4- SIGNE DU BINOME AX+B

2-4-1- PROPRIETE

Considérons le binôme ax+b où $a\neq 0$

$i- \quad si \;\; x \geq \frac{-b}{a} \;\; alors \;\; ax+b \quad et \;\; a\, ont \;\; le\, même \;\; signe$

$ii- \quad si \;\; x \leq \frac{-b}{a} \;\; alors \;\; ax+b \;\; et \;\; a \;\; ont \;\; des \;\; signes \;\; opposées$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
ax+b	- signe de a	0	signe de a	

2-4-2- EXERCICE

1- Etudier le signe des expressions suivantes

$i- \quad 3x+4 \quad ; \quad -2x+1$

$ii- \quad (x+1)(x-3) \quad ; \quad \frac{3x+1}{x+2}$

2- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

$i- \quad 4x^2-1 \geq 0$

$ii- \quad (4x-5)(2x+7)+3(2x+7) > 0$

$iii- \quad \frac{4x+1}{2x-1} < 3$

3- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$i- \quad 3\left|x-1\right|-2\left|x+1\right|=1$

$ii- \quad \left|3x-4\right| = 2x+5$

3- EQUATION DU SECOND DEGRE A UNE INCONNUE

3-1- DEFINITION

On appelle équation du second degré à une inconnue, toute équation qui s'écrit sous forme: $ax^2+bx+c=0$ où x est l'inconnue et a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$

3-2- PROPRIETE

Considérons dans $\mathbb{R}$ l'équation $ax^2+bx+c=0$ où $a \neq 0$ et S l'ensemble des solutions.

Posons $\Delta = b^2-4ac$ appelé discriminant de l'équation

i- $si \;\; \Delta < 0 \;\; alors \;\; l'équation \;\; n'admet \;\; pas\, de \;\; solutions \;\; et \;\; S = \varnothing$

ii- $si \;\; \Delta = 0 \;\; alors \;\; l'équation\, admet \;\; une\, solution\, double\, et \;\; S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

iii- $si \;\; \Delta > 0 \;\; alors\, l'équation\, admet\, deux \;\; solutions\, distinctes$ et

$$S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$$

DEMONSTATION

On a :

$$ax^2+bx+c = a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}) = a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}]$$

$$= a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}]$$

Cette forme est appelée forme canonique

3-3-EXEMPLE

Résolvons l'équation suivante dans $\mathbb{R}$: $x^2 - 2x - 3 = 0$

On a $a = 1$; $b = -2$; $c = -3$

Calculons $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$

L'équation admet deux solutions distinctes:

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-4}{2\times 1} = -1 \quad ou \quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4}{2\times 1} = 3$$

Donc $S = \{-1, 3\}$

3-4-EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$i - \quad -2x^2 + 3x + 1 = 0$

$ii - \quad x^2 + x + 2 = 0$

$iii - \quad 4x^2 - 4x + 1 = 0$

3-5- FACTORISATION DU TRINOME

3-5-1- PROPRITE

Considérons le trinôme $ax^2 + +bx + c$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant

1- si $\Delta > 0$ alors le trinôme admet deux solutions $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad et \quad$ $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Par suite $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

2- si $\Delta = 0$ alors le trinôme admet une solution double $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$

Par suite $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

3- si $\Delta < 0$ alors le trinôme n'admet pas de solution

Par suite $ax \ + bx + c = a[(x + \dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}]$ forme canonique

3-5-2-EXEMPLE

Les solutions de l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$ sont $x_1 = -1 \quad et \quad x_2 = 3$

Par suite $x^2 - 2x - 3 = (x - (-1))(x - 3) = (x + 1)(x - 3)$

3-5-3- EXERCICE

Factoriser les trinômes suivants:

$i - \quad 4x^2 + 5x + 1 \quad ; \quad -3x^2 + 2x + 5$

$ii - \quad 25x^2 - 10\sqrt{2}x + 2 \quad ; \quad 9x^2 + 12x + 4$

3-6- SOMME ET PRODUIT DE RACINE

3-6-1- PROPRIETE

Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$ admet des solutions x_1 et x_2 distinctes ou non, on a $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \quad et \quad x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$

DEMONSTRATION

Si $\Delta \geq 0$ alors $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

On a $x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$ et

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -(\frac{\sqrt{\Delta}+b}{2a}) \times (\frac{\sqrt{\Delta}-b}{2a}) = -\frac{(\sqrt{\Delta})^2 - b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

3-6-2- EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x \times y = 6 \end{cases}$$

3-6-3- PROPRIETE

Soient S et P deux réels, le système $\begin{cases} x + y = S \\ x \times y = P \end{cases}$ admet une solution si et seulement si

$S^2 - 4P \geq 0$, les nombres x et y sont les solutions de l'équation: $X^2 - SX + P = 0$

3-6-4- EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x \times y = 15 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x^2 y + xy^2 = 30 \end{cases}$$

4- INEQUATION DE SECOND DEGRE A UNE INCONNUE

4-1- LE SIGNE DU TRINOME

4-1-1- PROPRIETE

Considérons le trinôme $ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant

i- $si\ \ \Delta < 0\ \ alors\ \ ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right]$ et son signe est le signe de a car

$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right] > 0$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a

ii- $si\ \ \Delta = 0\ \ alors\ \ ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ où $x_1 = \frac{-b}{2a}$ et son signe est le signe de a,

sauf pour x_1 où il s'annule

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

iii- $si\ \ \Delta > 0\ \ alors\ \ ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ et son signe est le signe de a à l'extérieur des solutions x_1 et x_2 et du signe de (-a) à l'intérieur des solutions x_1 et x_2

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de (-a)	0	signe de a

4-1-2- EXERCICE

Etudier le signe des trinômes suivants:

$i-\quad 3x^2-2x+5$

$ii-\quad -x^2-2x+15$

$iii-\quad -5x^2+10\sqrt{5}x-25$

4-2- INEQUTION DU SECOND DEGRE A UNE INCONNUE

4-2-1- DEFINITION

Considérons le trinôme ax^2+bx+c , toute inégalité de la forme:
$ax^2+bx+c\leq 0 \quad ou \quad ax^2+bx+c\geq 0$ est appelée inéquation du second degré à une inconnue

4-1-2- EXERCICE

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

$i-\quad 3x^2-2x-8>0$

$ii-\quad x^2+3x+15<0$

$iii-\quad 4x^2-12x+9\leq 0$

2- Résoudre $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$i-\quad x^4-5x^2-6=0$

$ii-\quad x-2\sqrt{x}-3=0$

$iii-\quad \sqrt{x+1}=x-1 \quad , \quad \sqrt{5x-1}=x-3$

$iv-\quad \sqrt{-x^2+2x+9}=1+x$