BAC (JUIN 2014)

EXRCICE 1

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les points $A(0,3,1)$, $B(-1,3,0)$ et $C(0,5,0)$ et la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-4x-5=0$

1-a- montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$, et déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés

b- montrer que $2x-y-2z+5=0$ est l'équation cartésienne du plan (ABC)

2-a- montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(2,0,0)$ et de rayon 3

b- montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

c- déterminer le triplet des coordonnées de H point tangent du plan (ABC) et la sphère (S)

EXERCICE2

1- résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante $z^2-z\sqrt{2}+2=0$

2- on considère le nombre complexe $u=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$

a- montrer que le module de u est $\sqrt{2}$ et que $\arg u\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

b- montrer que u^6 est un nombre réel (utiliser la forme trigonométrique de u)

3- on considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$

Les points A et B d'affixes respectivement $a=4-4\sqrt{3}\,i$, $b=8$

Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' l'image du point M par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

a- exprimer z' en $fonction$ de z

b- vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R, et déduire que le triangle OAB est équilatéral

EXECICE 3

Soit (u_n) une suite définie par: $u_0=13$ et $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$ $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+7$

1- montrer par récurrence que: $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$ $u_n<14$

2-on considère la suite numérique (v_n) définie par: $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$ $v_n=14-u_n$

a- montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{2}$, puis écrire v_n en fonction de n

b- montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$ $u_n=14-\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

c- déterminer la plus valeurs de n pour que $u_n>13,99$ (utiliser ln)

EXERCICE 4

Une caisse contient 9 boules portant les numéros suivants: 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1
(indiscernable par le toucher)
On tire simultanément 2 boules de la caisse
1- soient l'événement A:"la somme des nombres portés par les boules est égale à (1)",
Montrer que $P(A)=\dfrac{5}{9}$
2- on considère le jeu suivant: Said tire simultanément deux boules de la caisse, et il est considéré gagnant s'il tire deux boules portant toutes les deux le numéro (1)
a- montrer que la probabilité de gagner pour Said est égale à $\dfrac{1}{6}$
b- Said a joué le jeu trois fois (il remet les deux boules après chaque tirage) quelle est la probabilité pour qu'il gagne deux fois exactement

EXERCICE 5

$I-$ Soit g une fonction définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par : $g(x)=1-\dfrac{1}{x^2}+\ln x$

1- montrer que: $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)\quad g'(x)=\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x}$ et déduire que g est croissante sur $\left]0,+\infty\right[$

2- vérifier que $g(1)=0$, puis déduire que:
$\left(\forall x\in\left]0,1\right]\right)\quad g(x)\le 0 \ \ et\ \left(\forall x\in\left[1,+\infty\right[\right)\quad g(x)\ge 0$

$II-$ on considère la fonction f définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par: $f(x)=(1+\ln x)^2+\dfrac{1}{x^2}$ et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ tel que $\left(\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1cm\right)$

1- montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$, puis interpréter géométriquement le résultat

2-a- calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

b- montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+\ln x)^2}{x}=0$ (utiliser le changement de variable $X=\sqrt{x}$)
puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

c- déterminer la branche parabolique de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

3-a- montrer que: $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)\quad f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x}$, puis déduire que f est croissante sur $\left[1,+\infty\right[$, et décroissante sur $\left]0,1\right]$

b- donner le tableau de variation de f sur $\left]0,+\infty\right[$, puis déduire que:
$\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)\quad f(x)\ge 2$

4- tracer la courbe (C) (la courbe admet un point d'inflexion , dont on n'est pas obligé de déterminer)

5- on considère les deux intégrales: $I = \int_1^e (1+\ln x)\,dx \quad et \quad J = \int_1^e (1+\ln x)^2\,dx$

a- montrer que la fonction $H(x) = x\ln x$ est une primitive de la fonction $h(x) = 1+\ln x$ sur $\left]0,+\infty\right[$, puis déduire que: $I = e$

b- en utilisant l'intégration par partie, montrer que: $J = 2e - 1$

c- calculer l'aire de la surface limité par la courbe (C), l'axe des abscisse et les droites d'équation $x = 1 \ et \ x = e$

BAC (JUILLET 2014)

EXERCICE 1

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, le point $A(0,0,1)$, le plan (P) d'équation: $2x + y - 2z - 7 = 0$, et la sphère (S) d'équation de centre $\Omega(0,3,-2)$ et de rayon 3

1-a- montrer que $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) qui passe par A et perpendiculaire au plan (P)

b- vérifier que la droite (Δ) coupe le plan (P) au point H(2,1,-1)

2-a- montrer que $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$ $où$ $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

b- montrer que la distance du point Ω à la droite (Δ) est égale à 3

c- déduire que (Δ) est tangent à la sphère (S), et vérifier que le point H est le point tangent de la droite (Δ) à la sphère (S)

EXERCICE 2

Soit (u_n) une suite définie par: $u_1 = 5$ et $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{1 + u_n}$

1- montrer par récurrence que: $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ $u_n > 2$

2-on considère la suite numérique (v_n) définie par: $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ $v_n = \dfrac{3}{u_n - 2}$

a-montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ $v_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{u_n - 2}$, puis vérifier que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ $v_{n+1} - v_n = 1$

b- montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ $v_n = n$, et déduire que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ $u_n = 2 + \dfrac{3}{n}$

c- calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

EXERCICE 3

Pour déterminer 2 questions d'un examen oral réservé aux fonctionnaires, chaque candidat tire successivement et sans remise deux cartes de la caisse parmi 10 cartes qui se trouvent dans la caisse (les cartes sont indiscernables par le toucher): 8 cartes concernent les mathématiques et deux cartes concernent le français

1- soient l'événement A:" tirer 2 cartes de français", B:"tirer deux cartes différentes"

Montrer que $P(A) = \dfrac{1}{45}$ et $P(B) = \dfrac{16}{45}$

2- on considère la variable aléatoire X qui fait correspondre tout tirage au nombre de cartes tirées concernant le français

a- vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont: 0, 1, 2

b- montrer que: $P(X = 0) = \dfrac{28}{45}$

c- déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

EXERCICE 4

1- résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante $z^2-4z+5=0$

2- on considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$

Les points A, B, C, D et Ω d'affixes respectivement
$a=2+i$, $b=2-i$, $c=i$, $d=-i$ et $\omega=1$

a- montrer que: $\dfrac{a-\omega}{b-\omega}=i$

b- déduire que le triangle ΩAB est isocèle et rectangle en Ω

3- Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' l'image du point M par la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

a- montrer que $z'=iz+1-i$

b- vérifier que R(A)=C et R(D)=B

c- montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle, déterminer son centre et son rayon

EXERCICE 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=(xe^x-1)e^x$ et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ $\left(\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1\,cm\right)$

1- montrer que: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, et interpréter géométriquement le résultat

2-a- montrer que: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

b- déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$, dont il faut déterminer sa direction

3-a- vérifier que: $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$ $f'(x)=e^x\left(e^x-1+2xe^x\right)$, puis vérifier que $f'(0)=0$

b- montrer que: $\left(\forall x\in\left[0,+\infty\right[\right)$ $e^x-1\geq 0$ et que $\left(\forall x\in\left]-\infty,0\right]\right)$ $e^x-1\leq 0$

c- montrer que f est croissante sur les intervalles $\left[0,+\infty\right[$, et qu'elle est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty,0\right]$, puis donner le tableau de variation de f

4-a- montrer que l équation: $f(x)=0$, admet une seul solution α $dans$ $\left[0,+\infty\right[$ et que $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ (on $admet$ que $\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}<1$)

b- construire la courbe (C)(on admet que la courbe a un seul point d'inflexion non déterminé)

5- en utilisant l'intégration par partie montrer que: $\int_0^{\frac{1}{2}}xe^{2x}dx=\dfrac{1}{4}$

6- calculer l'aire de la surface limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0 \ et \ x = \dfrac{1}{2}$