BAC (JUIN 2012)

EXERCICE 1

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les points $A(1,1,-1)$, $B(0,1,-2)$ et $C(3,2,1)$ et la sphère (S) d'équation
$x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$

1- montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$, et déduire que $x-z-2=0$ est l'équation cartésienne du plan (ABC)

2-a- montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(1,0,1)$ $et\ de\ rayon$ $\sqrt{3}$

b- vérifier que $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{2}$, puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) $de\ rayon\ 1$

3- Soit (Δ) la droite qui passe par Ω et perpendiculaire au plan (ABC)

a- montrer que $\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ)

b- montrer que la droite (Δ) coupe le plan (ABC) au point H(2,0,0)

c- déduire le centre du cercle (Γ)

EXERCICE 2

1- résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante $z^2-12z+61=0$

2- on considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$

Les points A, B et C d'affixes respectivement $a=6-5i$, $b=4-2i$, et $c=2+i$

a- calculer $\dfrac{a-c}{b-c}$, déduire que les points A, B, et C sont alignés

b- on considère la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $u=1+5i$
vérifier que l'affixe du point D l'image du point C par la translation T est $d=3+6i$

c- montrer que $\dfrac{d-c}{b-c}=-1+i$ et que l'argument de $(-1+i)$ est $\dfrac{3\pi}{4}$

d- déduire la mesure de l'angle orienté $\overline{\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)}$

EXERCICE 3

Une caisse contient 8 boules portant les numéros suivants: 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2 (indiscernable par le toucher)
On tire simultanément 3 boules de la caisse
1- soient l'événement A:"obtenir 3 boules portants des numéros différents deux à deux",
B:"la somme des numéros portants par les 3 boules est égale à 5"

Montrer que $P(A)=\dfrac{5}{28}$ et $P(B)=\dfrac{5}{56}$

2-soit l'événement C:" la somme des numéros portants par les 3 boules est égale à 4"

Montrer que: $P\left(C\right) = \dfrac{3}{8}$

EXERCICE 4

Soit (u_n) une suite définie par: $u_0 = 11 \ et \ \left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \quad u_{n+1} = \dfrac{10}{11}u_n + \dfrac{12}{11}$

1- vérifier que: $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \quad u_{n+1} - 12 = \dfrac{10}{11}\left(u_n - 12\right)$

2-a- montrer par récurrence que: $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \quad u_n < 12$

b- montrer que la suite (u_n) est strictement croissante

c- déduire que la suite (u_n) est convergente

3-on considère la suite numérique (v_n) définie par: $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \qquad v_n = u_n - 12$

a- montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{10}{11}$, puis écrire v_n en fonction de n

b- montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \qquad u_n = 12 - \left(\dfrac{10}{11}\right)^n$, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE 5

$I -$ Soit g une fonction définie sur $I = \left]0, +\infty\right[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x$

1- montrer que: $x^2 - 1 \ et \ 2x^2 \ln x$ ont même signe sur l'intervalle $\left]0,1\right]$, puis déduire que $\left(\forall x \in \left]0,1\right]\right) \ g(x) \leq 0$

2- montrer que: $x^2 - 1 \ et \ 2x^2 \ln x$ ont même signe sur l'intervalle $\left[1, +\infty\right[$, puis déduire que $\left(\forall x \in \left[1, +\infty\right[\right) \ g(x) \geq 0$

$II -$ on considère la fonction f définie sur I par: $f(x) = \left(x^2 - 1\right)\ln x$ et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right) \ \left(\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 3\,cm\right)$

1-a- montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, et interpréter géométriquement le résultat

b- calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, (on a $\dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{x^2 - 1}{x}\right)\ln x$)

et déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$, déterminer sa direction

2-a- montrer que $\left(\forall x \in I\right) \ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$, et interpréter géométriquement le résultat $f'(1) = 0$

b- déduire que f est croissante sur $\left[1, +\infty\right[$, et décroissante sur $\left]0, 1\right]$

c- donner le tableau de variation de f sur I , puis déduire que $\left(\forall x \in I\right) \ f(x) \geq 0$

3- construire (C), dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

4-a- montrer que la fonction $H(x)=\frac{x^{3}}{3}-x$ est la primitive de la fonction $h(x)=x^{2}-1$
Sur l'intervalle $\mathbb{R}$

b- en utilisant l'intégration par partie, montrer que: $\int_{1}^{2}(x^{2}-1)\ln x\ dx=\frac{2}{9}(1+3\ln 2)$

c- calculer l'aire de la surface limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1\ et\ x=2$

BAC (2012)

EXERCICE 1

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, les points $A(-3,0,0)$, $B(0,0,-3)$ et $C(0,2,-2)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1,1,1)$ $et\ de\ rayon\ 3$

1-a- montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$, et déduire que $2x - y + 2z + 6 = 0$ est l'équation cartésienne du plan (ABC)

b- calculer $d(\Omega, (ABC))$, et déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

3- Soit (D) la droite qui passe par Ω et perpendiculaire au plan (ABC)

a- montrer que $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ)

b- montrer que le triplet des coordonnées de H point tangent de la sphère et le plan (ABC) est (-1, 2, -1)

EXERCICE 2

On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$

Les points A, B et C d'affixes respectivement $a = 2 - i$, $b = 6 - 7i$, et $c = 8 + 3i$

1-a- montrer que $\dfrac{c-a}{b-a} = i$

b- déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A

2- Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' l'image du point M par la rotation R de centre Ω milieu du segment [BC] et d'angle $\dfrac{-\pi}{2}$

a- vérifier que l'affixe de Ω est $\omega = 7 - 2i$

b- montrer que $z' = -iz + 9 + 5i$

c- montrer que le point C est l'image du point A par la rotation R

EXERCICE 3

Soit (u_n) une suite définie par: $u_0 = 3$ et $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3}{3u_n + 4}$

1- montrer par récurrence que: $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ $u_n > 1$

2-on considère la suite numérique (v_n) définie par: $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

a- vérifier que $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ $1 - v_n = \dfrac{2}{u_n + 1}$, et déduire que $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ $1 - v_n > 0$

b- montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$

3-a- montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{7}$, puis écrire v_n en fonction de n

b- montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n = 0$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE 4

Une caisse contient 4 boules blanches, 3 boules vertes et 5 boules rouges (indiscernable au toucher)

On tire simultanément 3 boules de la caisse

1- montrer que la probabilité d'obtenir 3 boules rouges est $\frac{1}{22}$

2- montrer que la probabilité d'obtenir 3 boules de mêmes couleurs est $\frac{3}{44}$

3- montrer que la probabilité d'obtenir au moins un boule rouge est $\frac{37}{44}$

EXERCICE 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=x+\frac{e^x-1}{e^x+1}$ et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ $\left(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\,cm\right)$

1- montrer que: $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$ $f(-x)=-f(x)$, et déduire que le point O est le centre de symétrie de la courbe (C)

2- vérifier que: $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$ $f(x)=x+1-\frac{2}{e^x+1}$ (utiliser cette forme pour les questions suivantes)

3-a- montrer que: $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$ $f'(x)=1+\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$, et vérifier que $f'(0)=\frac{3}{2}$

b- montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$

c- montrer que $y=\frac{3}{2}x$ est l'équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O

4-a- montrer que: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b- calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)$, et déduire que la droite (D) d'équation $y=x+1$ est une asymptote oblique de la courbe (C) au voisinage de $(+\infty)$

c- montrer que la courbe (C) se trouve au dessous de (D)

5- construire les droites (T) et (D), et la courbe (C), (on rappelle que le point O est le centre de symétrie)

6-a- montrer que la fonction $H(x)=x-\ln(e^x+1)$ est une primitive de la fonction $h(x)=\frac{1}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$

b- calculer l'aire de la surface limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x=0 \;\; et \;\; x=\ln 2$