BAC (JUIN 2011)

EXERCICE 1

1-a- résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante $x^2+4x-5=0$

b- résoudre dans l'intervalle $]0,+\infty[$, l'équation suivante: $\ln(x^2+5)=\ln(x+2)+\ln(2x)$

2- résoudre dans l'intervalle $]0,+\infty[$, l'inéquation suivante: $\ln(x)+\ln(x+1)\geq\ln(x^2+1)$

EXERCICE 2

Soit (u_n) une suite définie par: $u_0=1$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}=\dfrac{u_n}{8u_n+5}$

1- montrer par récurrence que: $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n>0$

2-on considère la suite numérique (v_n) définie par: $(\forall n\in\mathbb{N})\qquad v_n=\dfrac{2u_n+1}{u_n}$

a- montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q=5$, puis écrire v_n en fonction de n

b- montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\qquad u_n=\dfrac{1}{3\times 5^n-2}$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

EXERCICE 3

1- résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante $z^2-18\,z+82=0$

2- on considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$

Les points A, B et C d'affixes respectivement $a=9+i$, $b=9-i$, et $c=11-i$

a- montrer que $\dfrac{c-b}{a-b}=-i$, déduire que le triangle ABC est rectangle en B et isocèle

b- donner la forme trigonométrique du nombre complexe : $4(1-i)$

c- montrer que: $(c-a)(c-b)=4(1-i)$, puis déduire que $AC\times BC=4\sqrt{2}$

d- Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' l'image du point M par la rotation R de centre B et d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$

montrer que $z'=-iz+10+8i$, puis vérifier que l'affixe du point C' l'image du point C par la rotation R est $9-3i$

EXERCICE 4

$I-$ soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=(1-x)\,e^x-1$

1- a- montrer que: $(\forall x\in\mathbb{R})\ g'(x)=-x\,e^x$

b- montrer que g est décroissante sur $[0,+\infty[$ et croissante sur $]-\infty,0]$

et vérifier que $g(0)=0$

2- déduire que: $(\forall x\in\mathbb{R})\ \ g(x)\leq 0$

$II -$ on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = (2-x)e^{x} - x$ et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

$\left(\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1\,cm\right)$

1-a- montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

b- montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, et déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$, déterminer sa direction

2-a- montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, puis calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x) + x$ (utiliser $\lim_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$)

b-montrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique de la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

3-a- montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$ $f'(x) = g(x)$

b- interpréter géométriquement le résultat $f'(0) = 0$

c- montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, puis donner le tableau de variation de f

4- montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha \in \mathbb{R}$ et que

$\frac{3}{2} < \alpha < 2$, $(\,on\ admet\ que\ e^{\frac{3}{2}} > 3\,)$

5- a- résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) + x = 0$, et déduire que la courbe (C) et la droite (D) se coupent au point A(2,-2)

b- étudier le signe de $f(x) + x\ sur\ \mathbb{R}$

c- déduire que la courbe (C) se trouve au dessus de la droite (D) dans $\left]-\infty, 2\right[$, et au dessous de la droite (D) dans $\left]2, +\infty\right[$

6- a- montrer que la courbe (C) admet un seul point d'inflexion (0,2)

b- tracer la courbe (C) et la droite (D) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

7-a- en utilisant l'intégration par partie , montrer que $\int_{-1}^{0} (2-x)e^{x}dx = 3 - \frac{4}{e}$

b- déduire l'aire de la surface du plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites $x = 0\ et\ x = -1$

BAC (JUILLET 2011)

EXERCICE 1

1-a- résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante: $x^2 - 2x - 3 = 0$

b- résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante: $e^x - \frac{3}{e^x} - 2 = 0$

2-1-a- résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante: $e^{x+1} - e^{-x} \geq 0$

EXERCICE 2

1- résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante $z^2 - 6\ z + 18 = 0$

2- on considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$

Les points A, B d'affixes respectivement $a = 3 + 3i$, $b = 3 - 3i$

a- écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes $a\ et\ b$

b- montrer que b' l'affixe du point B' l'image du point B par la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$ est égal à 6

c- montrer que: $\frac{b - b'}{a - b'} = i$, puis déduire que le triangle AB'B est rectangle en B' et isocèle

d- déduire de ce qui précède que le quadrilatère OAB'B est un carré

EXERCICE 3

Soit (u_n) une suite définie par: $u_0 = 1\ et\ \left(\forall n \in \mathbb{N}\right)\quad u_{n+1} = \frac{6u_n}{15u_n + 1}$

1-a- vérifier que: $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)\quad u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$

b- montrer par récurrence que: $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)\quad u_n > \frac{1}{3}$

2-on considère la suite numérique (v_n) définie par: $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)\qquad v_n = \frac{3u_n - 1}{3u_n}$

montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{6}$, puis écrire v_n en fonction de n

3- montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)\qquad u_n = \frac{1}{3 - 2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n}$, puis calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE 4

$I -$ soit g une fonction définie sur $I = \left]0, +\infty\right[$ par : $g(x) = x - 1 + \ln x$

1- a- montrer que: $\left(\forall x \in I\right)\ g'(x) = \frac{x+1}{x}$

b- montrer que g est croissante sur I

2- déduire que: $\left(\forall x \in \left]0, 1\right]\right)\ g(x) \leq 0 \quad et \quad \left(\forall x \in \left[1, +\infty\right[\right)\ g(x) \geq 0$ (on a g(1)=0)

$II-$ on considère la fonction f définie sur I par: $f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\ln x$ et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ $\left(\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1\,cm\right)$

1-a- montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, et interpréter géométriquement le résultat

b- montrer que: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, (on a $\dfrac{f(x)}{x}=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\dfrac{\ln x}{x}$)

c- déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$, déterminer sa direction

2-a- montrer que $\left(\forall x\in I\right)$ $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

b- déduire que f est croissante sur $\left[1,+\infty\right[$, et décroissante sur $\left]0,1\right]$

c- donner le tableau de variation de f sur I

3- construire (C), (on admet que la courbe (C) a un seul point d'inflexion compris entre 1,5 et 2)

4-a- montrer que la fonction $H(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ est la primitive de la fonction $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ Sur l'intervalle I

b- montrer que: $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx=\frac{1}{2}$

c- en utilisant l'intégration par partie, montrer que: $\displaystyle\int_1^e \ln x\ dx=1$

5-a- vérifier que $\left(\forall x\in I\right)$ $f(x)=\ln x-\dfrac{\ln x}{x}$

b- montrer que l'aire de la surface limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1\ et\ x=e\quad est\ égale\ à\ 0.5\ cm^2$