1-LE PRODUIT SCALAIRE

1-1- DEFINITION

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et A, B et C des points de l'espace tel que: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan (ABC), on le note $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

1-2-PROPRIETE

Soit H la projection orthogonale de C sur (AB), alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$

1-3-ORTHOGONALITE DE DEUX VECTEURS

DEFINITION

On dit que deux vecteurs sont orthogonaux si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ et on écrit $\vec{u}\perp\vec{v}$

1-4-PROPRIETE

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de l'espace et k un réel, on a

i- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

ii- $k\cdot\vec{u}\ \cdot\vec{v}=k\times\ \vec{u}\cdot\vec{v}$

iii- $\vec{u}\cdot\ \vec{v}+\vec{w}\ =\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

1-5-NORME D'UN VECTEUR

a-DEFINITION

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. Le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{u}$ est appelé le carré scalaire de $\vec{u}$, on le note $\vec{u}^{2}$, et le nombre réel positif $\sqrt{\vec{u}^{2}}$ est appelé la norme de $\vec{u}$, on écrit $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{\vec{u}^{2}}$

b-PROPRIETE

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et k un réel, on a

i- $\left\|\vec{u}\right\|=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$

ii- $\left\|k\cdot\vec{u}\right\|=\left|k\right|\left\|\vec{u}\right\|$

iii- $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^{2}=\left\|\vec{u}\right\|^{2}+2\times\ \vec{u}\cdot\vec{v}\ +\left\|\vec{v}\right\|^{2}$

$\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^{2}=\left\|\vec{u}\right\|^{2}-2\times\ \vec{u}\cdot\vec{v}\ +\left\|\vec{v}\right\|^{2}$

$\left\|\vec{u}\right\|^{2}-\left\|\vec{v}\right\|^{2}=\ \vec{u}-\vec{v}\ \cdot\ \vec{u}+\vec{v}$

iv- $\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|\leq\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|$ inégalité de GAUCHY-SHWARTZ

v- $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|\leq\left\|\vec{u}\right\|+\left\|\vec{v}\right\|$ inégalité triangulaire

b-EXERCICE

1- Soient A, B et C trois point de l'espace tel que $AB=4$, $AC=5$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2$ calculer BC

2-Soient A, B, C et D quatre points montrer que:
$(AC) \perp (BD) \Leftrightarrow BC^2 + DA^2 = AB^2 + CD^2$

2-BASE ORTHONORME- REPERE ORTHONORME
2-1-BASE ORTHONORME
DEFINITION

Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormé de l'espace, si et seulement si:

$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

2-2-REPERE ORTHONORME
DEFINITION

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé si et seulement si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé

3-EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE
3-1-PROPREITE
Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de l'espace, $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs de l'espace , le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre: $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

EXERCICE

Soients $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ et $\vec{w} = (4-3m)\vec{i} + 5\vec{j} + (1+m)\vec{k}$ ou m est un paramètre réel

1- calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$

2-déterminer m pour que $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$

3-calculer $\cos\left(\overline{\vec{u}, \vec{v}}\right)$

3-2-DISTANCE ENTRE DEUX POINTS
PROPRIETE

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considérons les points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$. La distance entre A et B est le nombre réel

$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$

3-3-L'ENSEMBLE DES POINT M TEL QUE: $\vec{U} \cdot \overrightarrow{AM} = k$
a-PROPRIETE

Soient $\vec{u}(a, b, c)$ un vecteur de l'espace et $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace, k un nombre réel. L'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tel que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ est un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$

b-EXERCICE

Soit $A\left(-1,3,2\right)$ un point de l'espace et $\vec{u}\left(2,1,3\right)$ un vecteur de l'espace. Déterminer l'ensemble des points M(x,y,z) tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$

4-PLAN DANS L'ESPACE

4-1- VECTEUR NORMAL A UN PLAN

a-DEFINITION

Soit (P) un plan dans l'espace. On appelle vecteur normal à un plan (P), tout vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal au plan (P)

b-PROPRIETE

Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (P) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (P)

c-PROPRIETE

Soient a, b, c et d des nombres réels tels que $\left(a,b,c\right)\neq\left(0,0,0\right)$. l'ensemble des points $M\left(x,y,z\right)$ de l'espace qui vérifient: $ax+by+cz+d=0$ est un plan et $\vec{n}\left(a,b,c\right)$ son vecteur normal

d-EXERCICE

Déterminer le vecteur normal du plan (P) d'équation: $2x+3y-4z+1=0$

4-2-EQUATION CARTESIENNE DU PLAN

a-PROPRIETE

Soient $\vec{n}\left(a,b,c\right)$ un vecteur non nul, et A un point de l'espace. Le plan (P) qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points $M\left(x,y,z\right)$ qui vérifient $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$, et son équation s'écrit sous forme de $ax+by+cz+d=0$

b-EXERCICE

Déterminer l'équation cartésienne du plan (P) qui passe par le point $A\left(1,-2,3\right)$ et de vecteur normal $\vec{u}\left(-2,4,3\right)$

4-3-DISTANCE D'UN POINT A UN PLAN

a-DEFINITION

Soit (P) un plan et A un point de l'espace, H le projeté orthogonal de A sur (P). la distance AH est appelée la distance du point A au plan (P), et se note: d(A,(P))=AH

b-PROPRIETE

Soit (P) un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$, et $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ un point de l'espace. La distance du point A au plan (P) est: $d(A,(P))=\dfrac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

c-EXERCICE

Soit (P): $2x+y+2z-3=0$ et $A\left(2,1,-1\right)$ un point de l'espace, calculer $d\left(A,(P)\right)$

4-4-POSITION RELATIVE DE DEUX PLANS

a-PROPRIETE

Soient (P): $ax+by+cz+d=0$ et (P'): $a'x+b'y+c'z+d'=0$ deux plans de l'espace. $\vec{n}(a,b,c)$ et $\vec{n}'(a',b',c')$ sont les vecteurs normaux respectifs de (P) et (P') i- $P \;//\; P' \Leftrightarrow \vec{n} \quad et \quad \overrightarrow{n'}$ sont colinéaires

ii- $P \cap P' \neq \varnothing \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires

iii- $P \perp P' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{n'} = 0$

<u>b-EXERCICE</u>

Soient (P): $2x - 2y + z + 1 = 0$ et (Q): $(m-1)x + 2y + (2m-5)z + 7 = 0$ deux plans dans l'espace

1-déterminer m pour que (P) et (Q) soient perpendiculaires

2-on pose m= 3, déterminer l'ensemble des points M(x,y,z) tel que $d(M,(P)) = d(M,(Q))$

<u>5-LA SPHERE</u>

<u>5-1-DEFINITION</u>

Soit Ω un point de l'espace et R un réel positif. L'ensemble S des points de l'espace tel que $\Omega M = R$ est appelé sphère de centre Ω et de rayon R et on le note $S = S(\Omega, R)$

<u>5-2-EQUATION CARTESIENNE D'UNE SPHERE</u>

<u>a-PROPRIETE</u>

Soit S une sphère de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R, son équation cartésienne s'écrit sous forme de: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

<u>b-EXERCICE</u>

Déterminer l'équation de la sphère de centre $A(2,-1,1)$ et de rayon r=2

<u>5-3-REPRESENTATION PARAMETRIQUE D'UNE SPHERE</u>

<u>a-PROPRIETE</u>

Soit S une sphère de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R, le système suivant

$\begin{cases} x = a + R\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y = b + R\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z = c + R\cos(\varphi) \end{cases}$ est appelé représentation paramétrique de la sphère (S)

<u>b-Démonstration</u>

<u>5-4-L'ETUDE DE L'EQUATION: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$</u>

<u>a-PROPRIETE</u>

Soit S l'ensemble des points M(x,y,z) de l'espace tels que:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ où a, b, c et d des réels donnés

i- si $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ alors (S) est une sphère de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

ii-si $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$ alors (S) est le point $\Omega(a,b,c)$

iii-si $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$ alors $S = \varnothing$

<u>b-EXERCICE</u>

Déterminer l'ensemble des points M(x,y,z) dans les cas suivants

i- $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z = 0$

ii- $x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y + 4z + \frac{15}{4} = 0$

5-5-SPHERE DEFINIT PAR SON DIAMETRE

a-PROPRIETE

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace. L'ensemble des points M(x,y,z) tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est une sphère de diamètre [AB], et d'équation cartésienne:

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

b-EXERCICE

Déterminer l'équation de la sphère (S) de diamètre [AB], tel que A(1,4,-3) et B(1,1,-1)

6-POSITION RELATIVE D'UNE DROITE ET D'UNE SPHERE

6-1-PROPRIETE

Soient (D) une droite et (S) une sphère de centre Ω et de rayon R

i- si $d(\Omega,(D)) = R$ alors la droite (D) coupe (S) en un point, on dit que (D) est tangente à la sphère (S)

ii- si $d(\Omega,(D)) < R$ alors (D) coupe (S) en deux points

iii-si $d(\Omega,(D)) > R$ alors (D) et (S) ne se coupent pas

6-2-EXERCICE

Etudier les positions relatives de la droite (D) et la sphère (S) dans les cas suivants

i- $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 1 = 0$ et $(D): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$

ii- $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2y + 4z = 0$ et $(D): \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + t \\ z = -2 + 5t \end{cases}$

7-POSITION RELATIVE D'UN PLAN ET D'UNE SPHERE

7-1-PROPRIETE

Soient (P) un plan et (S) une sphère de centre Ω et de rayon R

i- si $d(\Omega,(P)) = R$ alors (P) coupe (S) en un point, on dit que (P) est tangente à (S)

ii- si $d(\Omega,(P)) > R$ alors (P) ne coupe pas (S)

iii-si $d(\Omega,(P)) < R$ alors (P) coupe (S) selon un cercle (C) de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ et de centre ω l'intersection du plan (P) et la droite qui passe par Ω et perpendiculaire au plan (P)

7-2-EXERCICE

Etudier la position relative du plan (P) et la sphère (S) dans le cas suivant

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$

$(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$

dans tous les exercice l'espace est muni d'un repère orthonormé $O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

EXERCICE 1

on considère les deux droites

$(\Delta):\dfrac{x+3}{2}=y-1=\dfrac{z-2}{2}$ et

$(D):\begin{cases}x=2+t\\y=1+2t\\z=-1-2t\end{cases}$

1-montrer que $(\Delta)\perp(D)$

2-écrire l'équation cartésienne du plan (P) qui contient (D) et parallèle à (Δ)

3-écrire l'équation du plan (Q) qui contient (Δ) et perpendiculaire à (P)

4-a- déterminer la représentation paramétrique de la droite (D') l'intersection de (P) et (Q)

b- déterminer les coordonnées du point C l'intersection de (D) et (D')

EXERCICE 2

Soit (P): $x-y+z=0$ et

$(Q):\begin{cases}x=1-t+k\\y=-1+3t-k\\z=1+t+k\end{cases}$

deux plans de l'espace

1-a- donner l'équation cartésienne du plan (Q)

b- montrer que $(P)\perp(Q)$

c- déterminer la représentation paramétrique de la droite (D) intersection de (P) et (Q)

2-soit $(\Delta):x-3=\dfrac{y-2}{3}=z-2$

a-déterminer les coordonnées des points S et T intersections de la droite (Δ) respectivement avec les plans (Q) et (P)

b- déterminer les coordonnées des points E et F de la droite (Δ) qui se trouvent distants de $\sqrt{3}$ du plan (P)

EXERCICE 3

on considère les points A(2,1,0), B(0,2,1) et C(1,0,2)

1-a- montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés

b- déterminer l'équation cartésienne de (ABC)

2-déterminer l'équation cartésienne de la sphère (S) de centre $\Omega(1,0,-2)$ et qui passe par le point A

3- étudier l'intersection de la sphère (S) et la droite (D) d'équations cartésiennes:

$(D):\dfrac{4-x}{2}=y=z+1$

4-déterminer l'intersection de la sphère (S) et le plan (ABC)

5-écrire l'équation du plan (Q) tangent à la sphère (S) au point A'(2,-1,0)

EXERCICE 4

On considère la droite

$(D):x-4=-y=\dfrac{z-5}{2}$ et la sphère

$(S):x^2+y^2+z^2-4x+6z-1=0$

1-déterminer le centre Ω et le rayon R de la sphère (S)

2-montrer que (D) est tangente à la sphère (S) et déterminer le point tangent

3-montrer que le plan $(P):x+2y+3z-7=0$ est tangent à la sphère (S) et déterminer le point tangent

4- étudier la position relative de la sphère (S) et le plan $(Q):2x-y+z+5=0$

EXXERCICE 5

Soit $(S):x^2+y^2+z^2+x-\dfrac{1}{4}=0$

1- déterminer le centre Ω et le rayon R de la sphère (S)

2-montrer que le plan $(P):y+z-1=0$ est tangent à la sphère (S)

3-soit le plan $(Q):2x-y+z+1=0$

a- montrer que $(P)\perp(Q)$

b- déterminer la représentation paramétrique de la droite (D) intersection de (P) et (Q)

c- montrer que (D) est tangent à (S) et déterminer le point tangent

d-montrer que le plan (Q) coupe (S) selon un cercle de centre ω et de rayon r