1-EXPERIENCE ALEATOIRE

1-1-DEFINITION 1

i- on appelle expérience aléatoire, toute expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat. L'ensemble de tous les résultats aléatoires s'appelle l'univers de l'expérience, on le note Ω .
ii- soit une expérience aléatoire d'un univers, chacun des résultats possibles s'appelle une éventualité (ou un événement élémentaire ou une issue)
iii- on appelle événement tout sous ensemble de Ω . un événement est constitué de zéro, un ou plusieurs éventualités

1-2-EXEMPLE

Lancer un dé à six faces est une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, l'ensemble $A = \{2,4,6\}$ est un événement qui peut se traduire par la phrase " le résultat du dé est un nombre pair"

1-3-DEFINITION 2

i- l'événement impossible est la partie noté $\varnothing$, lorsqu' une éventualité ne le réalise pas
ii- l'événement certain est noté Ω , lorsque toutes les éventualités le réalisent
iii- l'événement contraire de A est noté $\overline{A}$, c'est l'ensemble des éventualités de Ω qui n'appartiennent pas à A
iv- l'événement $A \cup B$ est constitué des éventualités qui appartiennent soit à A, soit à B, soit aux deux
v- l'événement $A \cap B$ est constitué des éventualités qui appartiennent à A et à B

1-4-EXEMPLE

Lancer un dé, on a son univers $\Omega = \quad 1,2,3,4,5,6$. Soient l'événement A " obtenir un nombre pair" et B " obtenir un multiple de 3 ", donc $A = \quad 2,4,6$ et $B = \quad 3,6$
L'événement C " obtenir un nombre supérieur à 7 " donc $C = \varnothing$.
L'événement $A \cap B = \quad 6$; l'événement $A \cup B = \quad 2,3,4,6$; l'événement $\overline{A} = \quad 1,3,5$

2- PROBABILITE

2-1-DEFINITION

La probabilité d'un événement élémentaire est un nombre réel tel que :
i- ce nombre est compris entre 0 et 1
ii- la somme des probabilités de tous les événements élémentaires de l'univers est égale à 1

2-2-PROPRIETE

Soit p une probabilité définit sur l'univers Ω , on a $p(\varnothing) = 0$ et $p(\Omega) = 1$

2-3- EXEMPLE

Lancer un dé, on a $\Omega = \quad 1,2,3,4,5,6$

$p(\ 1\ ) = ... = ... = ... = p(\{6\}) = \dfrac{1}{6}$ et $p(\{2,4,6\}) = \dfrac{3}{6}$; on a $\sum_{i=1}^{i=6} p(\{i\}) = 1$

2-4- DEFINITION

On dit qu'il y a équiprobabilité quand tous les événements élémentaires ont la même probabilité, si A est un événement alors $p(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$ où
$card(A) =$ nombre de cas favorables
$card(\Omega) =$ nombre de cas possibles

2-5-PROPRIETE

Soient A et B deux événements dans l'univers Ω , on a:

i- pour tout A partie de Ω , on a $0 \leq p(A) \leq 1$

ii- pour tout A partie de Ω , on a $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

iii- si A et B sont incompatible ($A \cap B = \varnothing$), alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

iv- si $A \subset B$ alors $p(A) \leq p(B)$

v- pour toutes parties A et B de Ω , on a $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

2-6-EXEMPLE

1- lancer une pièce de monnaie une seule fois, on a $\Omega = \quad P, F$ donc $card(\Omega) = 2$

On a $p(\{P\}) = \dfrac{1}{2}$ et $p(\{F\}) = \dfrac{1}{2}$

2- lancer un dé une seul fois, on a $\Omega = \quad 1,2,3,4,5,6$, donc $card(\Omega) = 6$

Soit l'événement A:" obtenir un ombre pair", donc $A = \quad 2,4,6$ et $card(A) = 3$,

$p(A) = \dfrac{3}{6}$

Soit l'événement B:" obtenir un multiple de 3", donc $B = \{3,6\}$ et $card(B) = 2$, $p(B) = \dfrac{2}{6}$

On a $A \cap B = \{6\}$ et $card(A \cap B) = 1$ donc $p(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$

On a $A \cup B = \{2,3,4,6\}$ et $card(A \cup B) = 4$ donc $p(A \cup B) = \dfrac{4}{6}$

On a $\overline{B} = \{1,2,4,5\}$ et $card(\overline{B}) = 4$ donc $p(\overline{B}) = \dfrac{4}{6} = 1 - p(B)$

3- un sac contient 4 boules blanches et 3 boules noires, on tire simultanément 2 boules du sac

On a $card(\Omega) = C_7^2 = 21$, soit l'événement A:" tirer 2 boules blanches", on a

$card(A) = C_4^2 = 6$, donc $p(A) = \dfrac{C_4^2}{C_7^2} = \dfrac{6}{21}$

3-PROBABILITE CONDITIONNELLE

3-1-DEFINITION

soient A et B deux événements d'un univers Ω , tel que $p(A) \neq 0$. le nombre noté $p_A(B)$ définit par $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$ est une probabilité que l'on appelle probabilité de B sachant que A est réalisé

3-2-PROPRIETE

Soit Ω l'univers de l'expérience

i- si A et B deux événements de Ω tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$, alors

$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$ et $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$

ii- soient A_1 et A_2 deux événements tels que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ et $A_1 \cup A_2 = \Omega$, on a $p(B) = p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2)$ car on a :

$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)$

3-3-EXEMPLE

Un sac contient 6 boules rouges, 4 portent le numéro 1, 2 portent le numéro 0, et contient aussi 9 boules vertes, 6 portent le numéro 0 et 3 portent le numéro 1. On tire une boule du sac

1- calculons les probabilités suivantes:

- l'événement R" tirer une boule rouge", $p(R) = \dfrac{C_6^1}{C_{15}^1}$

-l'événement V" tirer une boule verte", $p(V) = \dfrac{C_9^1}{C_{15}^1}$

- l'événement U" tirer une boule portant 1", $p(U) = \dfrac{C_7^1}{C_{15}^1}$

- l'événement Z" tirer une boule portant 0", $p(Z) = \dfrac{C_8^1}{C_{15}^1}$

2- calculons les probabilités suivantes: $p(R \cap U) = \dfrac{C_4^1}{C_{15}^1}$ et $p(V \cap Z) = \dfrac{C_6^1}{C_{15}^1}$

3- Si la boule tirée est verte, quelle est la probabilité qu'elle porte 0:

$$p_V(Z) = \frac{p(V \cap Z)}{p(V)} = \frac{C_6^1}{C_9^1}$$

4- Si la boule tirée est rouge, quelle est la probabilité qu'elle porte 1:

$$p_R(U) = \frac{p(R \cap U)}{p(R)} = \frac{C_4^1}{C_6^1}$$

4- INDEPENDANCE DE DEUX EVENEMENTS

4-1-DEFINITION

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles

i- A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'une ne change pas la réalisation de l'autre.

ii- A et B sont indépendants si et seulement si : $p_A(B) = p(B)$ ou $p_B(A) = p(A)$

4-2-THEOREME

Deux événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants si et seulement si: $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

4-3- EXEMPLE

On lance un dé à six faces numéroté de 1 à 6 deux fois. L'événement A" obtenir le nombre 2 au premier lancer ", l'événement B "obtenir deux nombres dont la somme est 7 ", et l'événement C " obtenir deux nombres pairs ". On pose $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, alors on a $\Omega = E \times E$, calculons p(A), p(B), p(C), $p(A \cap B)$ et $p(A \cap C)$

$p(A) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{6}{6} = \dfrac{1}{6}$ et $p(B) = 2 \times (p(1) \times p(6) + p(2) \times p(5) + p(3) \times p(4)) = \dfrac{1}{6}$

$p(C) = 2(p(2)\times p(4) + p(2)\times p(6) + p(4)\times p(6)) = \frac{1}{6}$,

$p(A\cap B) = p(2)\times p(5) = \frac{1}{36} = p(A)\times p(B)$,

$p(A\cap C) = p(2)\times p(4) + p(2)\times p(6) = \frac{2}{36} \neq p(A)\times p(C)$

4-4- REPETITION DES EXPERIENCES

On lance un dé 4 fois est une expérience qui se répète 4 fois , cette expérience est formée d'une épreuve répétée 4 fois, calculons la probabilité d'obtenir un nombre divisible par 3 trois fois. L'événement A " obtenir un nombre divisible par 3 ", donc $A = \{3,6\}$, $p(A) = \frac{2}{6}$

Soit l'événement E " obtenir un nombre divisible par 3 trois fois " on a $\mid A \mid A \mid A \mid \overline{A} \mid$ et

$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = \frac{4}{6}$, donc $p(E) = C_4^3 p^3(1-p) = \frac{8}{81}$ où $p = p(A)$

5- LES VARIABLES ALEATOIRES

5-1- DEFINITION

i- une variable aléatoire X est une application définit sur un ensemble Ω muni d'une probabilité p à valeurs dans $\mathbb{R}$

ii- X prend les valeurs $x_1, x_2,,,,,,x_n$, avec les probabilités p_1, $p_2,,,,,,,,,p_n$, définies par

$p_i = p(X = x_i)$

iii- l'affectation des p_i aux x_i permet de définir une nouvelle loi de probabilité, cette loi est appelée loi de probabilité de X

5-2- EXEMPLE

Un sac contient 6 boules numérotées: 0-1-1-2-2-2. On tire simultanément deux boules. On considère la variable aléatoire X qui fait correspondre à chaque résultat de l'expérience la somme des nombres obtenus, les résultats obtenues sont : 0-1 ; 0-2 ; 1-1 ; 1-2 ; 2-2. Les valeurs possibles de x_i sont: 1-2-3-4. $X(\Omega) = \{1,2,3,4\}$ et $p(X=1) = \frac{C_1^1 \times C_2^1}{C_6^2} = \frac{2}{15}$;

$p(X=2) = \frac{C_1^1 \times C_3^1 + C_2^2}{C_6^2} = \frac{4}{15}$, $p(X=3) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_6^2} = \frac{6}{15}$, $p(X=4) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15}$

$X(\Omega)$	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$

$\sum_{i=1}^{i=4} p(X = x_i) = \frac{2}{15} + \frac{4}{15} + \frac{6}{15} + \frac{3}{15} = 1$

5-2- L'ESPERENCE MATHEMATIQUE; LA VARIANCE ; L'ECART-TYPE

a- DEFINITION

Soit X une variable aléatoire définit sur Ω , on pose $X(\Omega) = \ x_1, x_2,,,,,,,,x_n$ et

$p_i = p(X = x_i)$

i- l'espérance mathématique est le nombre E(X) définit par :

$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \times x_i = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$

ii- la variance de la variable aléatoire X est le nombre noté V(X), définit par :
$$V(X)=\sum_{i=1}^{i=n}(x_i-E(X))^2\times p_i$$
iii- l'écart-type de la variable aléatoire, est le nombre $\sigma(X)$, définit par: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

b-PROPRIETE

Soit X une variable aléatoire, on a : $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$, avec $E(X^2)=\sum_{i=1}^{i=n}p_i\times x_i^2$

c-EXEMPLE

D'après l'exemple précédent on a:

$X(\Omega)$	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$

$$E(X)=1\times\frac{2}{15}+2\times\frac{4}{15}+3\times\frac{6}{15}+4\times\frac{3}{15}=\frac{8}{3}$$
$$E(X^2)=1^2\times\frac{2}{15}+2^2\times\frac{4}{15}+3^2\times\frac{6}{15}+4^2\times\frac{3}{15}=8$$
$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{8}{9}$ et $\sigma(X)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

5-3-EXEMPLE DE LOI DISCRET

a-PROPOSITION

i-L'épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux éventualités S et $\overline{S}$. S correspond au succès et $p=p(S)$; $\overline{S}$ correspond à l'échec et $q=1-p=p(\overline{S})$

ii- Soit une épreuve de Bernoulli d'éventualité S (de probabilité p)et $\overline{S}$ (de probabilité $q=1-p$) , et X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 quand S est réalisé et 0 sinon. Par définition cette variable aléatoire suit la loi de Bernoulli de paramètre p, on a E(X)=p et V(X)=pq

b-DEFINITION

i- un schéma de Bernoulli est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendants. La variable aléatoire X à valeurs dans $0,1,2,,,,,,n$ associé à chaque liste le nombre de succès. Par définition X suit la loi binomiale de paramètre n et p, on la note $B(n,p)$ et $p=p(S)$

ii- Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n,p)$. Pour $k\in\ 0,1,2,,,,n$

$p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$; $E(X)=np$ et $V(X)=np(1-p)$

c-EXEMPLE

Une caisse contient 6 boules blanches et 4 boules noires, le joueur tire 3 boules simultanément. Le joueur est gagnant si les trois boules sont blanches. le joueur joue 4 fois quelle est la probabilité pour qu'il gagne trois fois. Soit l'événement

S " tirer 3 boules blanches ", on a $p(S)=\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{6}$, le joueur joue 4 fois et gagne 3 fois on a $\mid S \mid S \mid S \mid \overline{S} \mid$, donc $p(X=3)=C_4^3 p^3(1-p)=\dfrac{20}{6^4}$