1-FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

1-1-DEFINITION

La fonction logarithme népérien, notée ln, est définie sur $]0,+\infty[$, telle que ln(1)=0, elle est continue strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et admet pour dérivée la fonction : $x \to \frac{1}{x}$.

(on a : $\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x}$)

1-2-PROPRIETE

Considérons la fonction $f(x)=\ln(x)$, on a :

i- $\left(\forall(x,y)\in]0,+\infty[^2\right)$ $\ln(x\times y)=\ln(x)+\ln(y)$

ii-$\left(\forall(x,y)\in]0,+\infty[^2\right)$ $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$

iii- $\left(\forall x\in]0,+\infty[\right)$ $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x)$

iv- $\left(\forall x\in]0,+\infty[\right)\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$ $\ln(x^n)=n\ln(x)$; en général $\left(\forall r\in\mathbb{Q}\right)$ $\ln(x^r)=r\ln(x)$

v- $\left(\forall(x,y)\in]0,+\infty[^2\right)$ $\ln(x)=\ln(y)\Leftrightarrow x=y$

vi-$\left(\forall(x,y)\in]0,+\infty[^2\right)$ $\ln(x)\geq\ln(y)\Leftrightarrow x\geq y$

vii- $\left(\forall x\in]0,+\infty[\right)$ $\left(\forall y\in\mathbb{R}\right)$ $\ln(x)=y\Leftrightarrow x=e^y$

1-3-EXERCICE

1-Simplifier les expressions suivantes

$$A=\ln\sqrt{3}+\ln\frac{1}{3}-\ln 9 : B=\ln 8+\ln\sqrt{2}+\ln 16$$

$$C=\ln\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{5}+\ln\frac{5}{7}+\ln\frac{7}{9}$$

SOLUTION

$$A=\ln\sqrt{3}+\ln\frac{1}{3}-\ln 9=\frac{1}{2}\ln 3-\ln 3+\ln 3^2=\frac{1}{2}\ln 3-\ln 3+2\ln 3=\frac{3}{2}\ln 3$$

$$B=\ln 8+\ln\sqrt{2}+\ln 16=\ln 2^3+\frac{1}{2}\ln 2+\ln 2^4=3\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2+4\ln 2=\frac{15}{2}\ln 2$$

$$C=\ln\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{5}+\ln\frac{5}{7}+\ln\frac{7}{9}=-\ln 3+\ln 3-\ln 5+\ln 5-\ln 7-\ln 7-\ln 9=-2\ln 3$$

2-écrire les expressions suivantes en fonction de lna et lnb

$$A=\frac{1}{3}\ln(a^2\sqrt{b}) : B=\ln\frac{a}{b^2}-\ln\frac{\sqrt{a}}{b}$$

SOLUTION

$$A=\frac{1}{3}\ln\left(a^2\sqrt{b}\right)=\frac{1}{3}\left(\ln a^2+\ln\sqrt{b}\right)=\frac{1}{3}\left(2\ln a+\frac{1}{2}\ln b\right)=\frac{2}{3}\ln a+\frac{1}{6}\ln b$$

$$B=\ln\frac{a}{b^2}-\ln\frac{\sqrt{a}}{b}=\ln a-\ln b^2-\left(\ln\sqrt{a}-\ln b\right)=\ln a-2\ln b-\frac{1}{2}\ln a+\ln b=\frac{1}{2}\ln a-\ln b$$

3-déterminer le domaine de définition de f dans les cas suivants

$$f(x)=\ln(1+x):f(x)=\frac{1}{1-\ln x}::f(x)=\ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$$

SOLUTION

1- soit $f(x)=\ln(1+x)$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ 1+x>0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x>-1\right\}=\left]-1,+\infty\right[$$

2- soit $f(x)=\dfrac{1}{1-\ln x}$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x>0\ \ et\ \ 1-\ln x\neq 0\right\}$$

$$1-\ln x=0\Leftrightarrow\ \ln x=1\ \ \Leftrightarrow x=e$$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x>0\ et\ \ x\neq e\right\}=\left]0,e\right[\cup\left]e,+\infty\right[$$

3- soit $f(x)=\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ \ \frac{2x-1}{x+1}>0\ \right\}$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		-	|	-	0	+	
$x+1$		-	0	+	|	+	
$\frac{2x-1}{x+1}$		+	||	-	0	+	

$$D_f=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$$

4-résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$\ln(3x)=\ln(x-1)$

$\ln(x^2+x-2)=\ln 4$

$\ln(2x-1)+\ln(x+1)=0$

SOLUTION

1-$\ln(3x)=\ln(x-1)$

$$D=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ 3x>0\ \ et\ \ x-1>0\right\}=\left]1,+\infty\right[$$

$\ln(3x)=\ln(x-1) \Leftrightarrow 3x=x-1 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{2}$, puisque $\frac{-1}{2} \notin D \quad alors \quad S=\varnothing$

2- $\ln(x^2+x-2)=\ln 4$

$D=\left\{x\in\mathbb{R} \,/\, x^2+x-2>0\right\}$; on a $\Delta=9 \;\; et \;\; (x=1 \;\; ou \;\; x=-2)$

x	$-\infty$		-2		1		$-\infty$
x^2+x-2		+	0	-	0	+	

$D=\left]-\infty,-2\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

$\ln(x^2+x-2)=\ln 4 \Leftrightarrow x^2+x-2=4 \Leftrightarrow x^2+x-6=0$

On a $\Delta=25 \;\; et \;\; (\;x=2 \;\; ou \;\; x=-3)$, puisque $2\in D \;\; et \;\; -3\in D \;\; alors \;\; S=\{2,-3\}$

3- $\ln(2x-1)+\ln(x+1)=0$

$D=\left\{x\in\mathbb{R} \,/\; 2x-1>0 \;\; et \;\; x+1>0\right\}=\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

$\ln(2x-1)+\ln(x+1)=0 \Leftrightarrow \ln(2x-1)(x+1)=\ln 1 \Leftrightarrow (2x-1)(x+1)=1$

$\Leftrightarrow 2x^2+x-2=0$, on a $\Delta=17 \;\; et \;\; \left(x=\frac{-1+\sqrt{17}}{4} \;\; ou \;\; x=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right)$

Puisque $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\in D \;\; et \;\; \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\notin D \;\; alors \;\; S=\left\{\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right\}$

5-considérons l'équation (E) : $2X^2-3X+1=0$

i- résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E)

ii- en déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $2\ln^2(x)-3\ln(x)+1=0$

SOLUTION

i- résolvant l'équation (E): $2X^2-3X+1=0$

$\Delta=1 \;\; et \;\; \left(X=1 \;\; ou \;\; X=\frac{1}{2}\right)$

ii- en posant $X=\ln x$ l'équation $2\ln^2(x)-3\ln(x)+1=0$ devient: $2X^2-3X+1=0$

et les solutions de cette équation sont $X=1 \;\; ou \;\; X=\frac{1}{2}$ donc on a

$\ln(x)=1 \;\; ou \;\; \ln(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=e \quad ou \quad x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e} \Leftrightarrow S=\{e \;,\; \sqrt{e}\}$

6- résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$a-\quad \ln(x+2)-\ln(-3x+1)<0$

$b-\quad \ln(3x-2)\geq 3\ln 2$

$c-\quad \ln(x-1)+\ln(x-4)>\ln(x+4)$

$d-\quad \ln^2(x)-\ln(x)-2\leq 0$

$e-\quad \frac{2\ln(x)-3}{1+\ln(x)}\geq 0$

SOLUTION

$a-\quad \ln(x+2)-\ln(-3x+1)<0$

On a $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x+2>0\ \ et\ \ -3x+1>0\right\}=\left]-2\ ,\ \frac{1}{3}\right[$

$\ln(x+2)-\ln(-3x+1)<0 \ \Leftrightarrow\ \ln(x+2)<\ln(-3x+1)\ \Leftrightarrow\ x+2<-3x+1$

$\Leftrightarrow\ x<\frac{-1}{4}$ donc $S=\left]-2,\frac{1}{3}\right[\cap\left]-\infty,\frac{-1}{4}\right[=\left]-2,\frac{-1}{4}\right[$

$b-\quad \ln(3x-2)\geq 3\ln 2$

On a $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\ \ 3x-2>0\right\}=\left]\frac{2}{3},+\infty\right[$

Donc $S=\left]\frac{2}{3},+\infty\right[\cap\left[\frac{10}{3},+\infty\right[=\left[\frac{10}{3},+\infty\right[$

$c-\quad \ln(x-1)+\ln(x-4)\geq\ln(x+4)$

$D=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x-1>0\ \ et\ \ x-4>0\ \ et\ \ x+4>0\right\}=\left]4,+\infty\right[$

On a $\ln(x-1)+\ln(x-4)\geq\ln(x+4)\Leftrightarrow\ \ln((x-1)(x-4))\geq\ln(x+4)$

$\Leftrightarrow\ (x-1)(x-4)\geq(x+4)\Leftrightarrow\ x^2-6x\geq 0$

x	$-\infty$		0		6		$-\infty$
x^2-6x		+	0	-	0	+	

Donc $D=\left]4,+\infty\right[\cap\left[6,+\infty\right[=\left[6,+\infty\right[$

$d-\ \ln^2(x)-\ln(x)-2\leq 0$

$D=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x>0\right\}=\left]0,+\infty\right[$

Posons $X=\ln(x)$, l'inéquation devient $X^2-X-2\leq 0$

$\Delta=9\ et\ \ (\ X=2\ ou\ \ X=-1\ )$ donc

$\ln(x)=2\quad ou\ \ \ln(x)=-1\ \Leftrightarrow\ \ x=e^2\quad ou\quad x=e^{-1}$

x	0		e^{-1}		e^2		$+\infty$
$X=\ln(x)$	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
X^2-X-2		+	0	-	0	+	
$\ln^2(x)-\ln(x)-2$		+	0	-	0	+	

Donc $S=\left[e^{-1}\ ,\ e^2\right]$

$e-\quad \frac{2\ln(x)-3}{1+\ln(x)}\geq 0$

On a $D=\left]0,+\infty\right[\ ;\ 2\ln(x)-3=0\ \Leftrightarrow\ x=e^{\frac{3}{2}}\ \ et\ \ 1+\ln(x)=0\ \Leftrightarrow\ x=e^{-1}$

x	0	e^{-1}	$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$

$2\ln(x)-3$	-		-	0	+
$\ln(x)+1$	-	0	+		+
$\dfrac{2\ln(x)-3}{\ln(x)+1}$	+	$\Vert$	-	0	+

L'inéquation a pour solution $S = \left]0\ ,\ e^{-1}\right] \cup \left[e^{\frac{3}{2}}\ ,\ +\infty\right[$

2-ETUDE DE LA FONCTION LOGARITHME

2-1-PROPRIETE

Soit f(x)=ln(x)

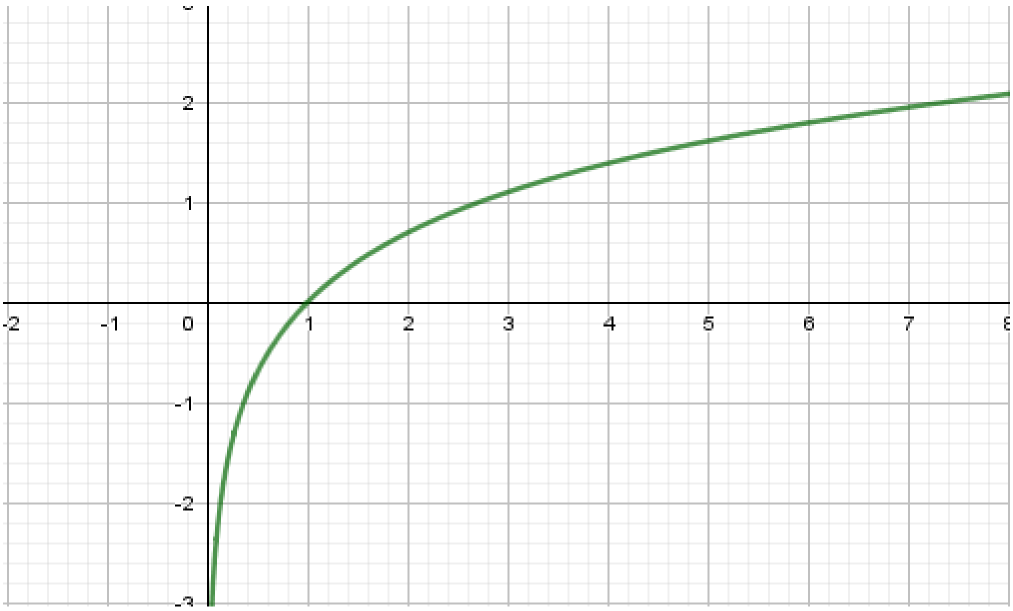
i- domaine de définition : $D_f =]0,+\infty[$

ii- calcul des limites : $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$

iii- étude des branches infinies : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$, donc (C_f) admet une asymptote parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

iv- $(\forall x\in]0,+\infty[)$ on a : $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}\succ 0$ ln est une fonction strictement croissante sur $]0,+\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$



2-2-LIMITES PARTICULIERES

2-2-1-PROPRIETE

i- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$; $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$

ii- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

iii- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$

2-2-2-EXERCICE

Calculer les limites suivantes :

i- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3\ln x + 1}{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x - \ln x$; $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-1)\dfrac{\ln x}{x}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln(\dfrac{x^3-2}{x})$

ii- $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x + \ln x$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} + \ln x$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x/2)}{x-2}$

SOLUTION

1- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3\ln(x)+1}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} 3\dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{1}{x} = 3\times 0 + 0 = 0$

2- $\lim\limits_{x\to +\infty} x - \ln(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = (+\infty)\times(1-0) = +\infty$

3- $\lim\limits_{x\to +\infty} (x+1)\dfrac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln(x) = (1+0)(+\infty) = +\infty$

4- on va utiliser le changement de variable pour calculer cette limte $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln\left(\dfrac{x^3-2}{x}\right)$

on pose $X = \dfrac{x^3-2}{x}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} X = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-2}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln\left(\dfrac{x^3-2}{x}\right) = \lim\limits_{X\to -+\infty} \ln(X) = +\infty$

5- $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x + \ln(x) = 0 + (-\infty) = -\infty$

6- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} + \ln(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+x\ln(x)}{x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

7- pour calculer sa limite, on utilise le changement de variable en posant $X = 3x$

On a $\lim\limits_{x\to 0} X = \lim\limits_{x\to 0} 3x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x} = \lim\limits_{X\to 0} 3\dfrac{\ln(1+X)}{X} = 3\times 1 = 3$

8- pour calculer sa limite, on utilise le changement de variable en posant $X = \dfrac{x}{2}$

On a $\lim\limits_{x\to 2} X = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{2} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x/2)}{x-2} = \lim\limits_{X\to 1} \dfrac{\ln(X)}{2(X-1)} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{X\to 1} \dfrac{\ln(X)}{X-1} = \dfrac{1}{2}\times 1 = \dfrac{1}{2}$

3-DERIVEE LOGARITHMIQUE

3-1-DEFINITION

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, et $\left(\forall x \in I\right) : u(x) \succ 0$. la fonction ln(u(x)) admet une dérivée, telle que : $\left(\ln(u(x))\right)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sur I

3-2-EXERCICES

1-calculer la dérivée de f dans les cas suivants :

$$f(x) = x^2 - x\ln x \ ; \quad f(x) = \frac{x-2}{\ln x} \quad ; \quad f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x-3}\right)$$

SOLUTION

1- soit $f(x) = x^2 - x\ln(x)$

$$f'(x) = (x^2)' - (x\ln(x))' = 2x - \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) = 2x - \ln(x) - 1$$

2- soit $f(x) = \dfrac{x-2}{\ln x}$

$$f'(x) = \left(\frac{x-2}{\ln x}\right)' = \frac{\left(x-2\right)' \times \ln x - \left(x-2\right) \times \left(\ln x\right)'}{\left(\ln x\right)^2} = \frac{\ln x - \dfrac{x-2}{x}}{\left(\ln x\right)^2} = \frac{x\ln x - x + 2}{x\left(\ln x\right)^2}$$

3- soit $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)$

$$f'(x) = \frac{\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)'}{\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)} = \frac{-1}{\left(x-3\right)^2} \times \frac{x-3}{x-2} = \frac{-1}{\left(x-2\right)\left(x-3\right)}$$

2-considérons : $f(x) = x - \ln x$

a- déterminer D_f ; calculer les limites aux bornes de D_f

b-étudier les branches infinies de f

c- étudier les variations de f

d-tracer C_f

SOLUTION

a- $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0\right\} = \left]0, +\infty\right[$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x - \ln x = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = (+\infty) \times (1 - 0) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x - \ln x = 0 - (-\infty) = +\infty$$

b- étudions les branches infinies

On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{\ln x}{x} = 1 - 0 = 1$

On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} (-\ln x) = -\infty$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite $y = x$ au voisinage de $+\infty$

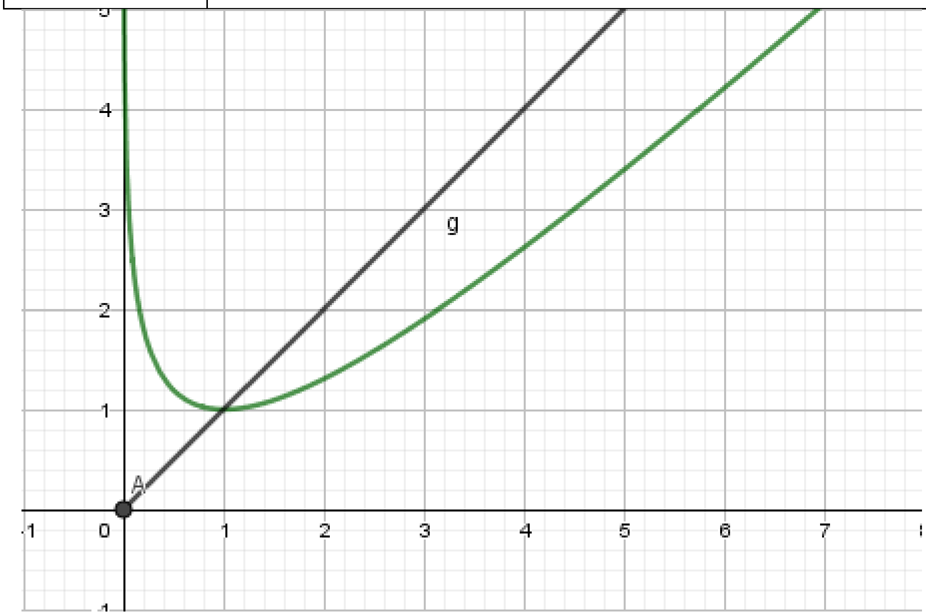
c- étudions les variations de f

$f'x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, puisque $x > 0$, alors le signe de $f'(x)$ est le signe de $(x-1)$

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		-	0	+	

Tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$



3- soit $f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(x+1)$

a-déterminer D_f ; calculer les limites aux bornes de D_f

b- étudier les branches infinies de f

c- étudier les variations de f

d- tracer C_f

SOLUTION

a- $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 + x > 0\right\} = \left]-1, +\infty\right[$

On a : $\ln(1+x)=\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-\frac{x^2}{2}-\ln(x+1)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{x}{2}-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=+\infty(-\infty)=-\infty$$

on pose $X=x+1$; on a $\lim_{x\to-1^+} X=\lim_{x\to-1^+} x+1=0^+$ on obtient

$\lim_{x\to-1^+} \ln(x+1)=\lim_{X\to0^+} \ln X=-\infty$ d'où on a

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+} x-\frac{x^2}{2}-\ln(x+1)=-(-\infty)=+\infty$$

b- étudions les branches infinie

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{x}{2}-\ln(x+1)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\ln(x+1)\right)=(+\infty)\left(0-\frac{1}{2}-0\right)=-\infty$$

la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

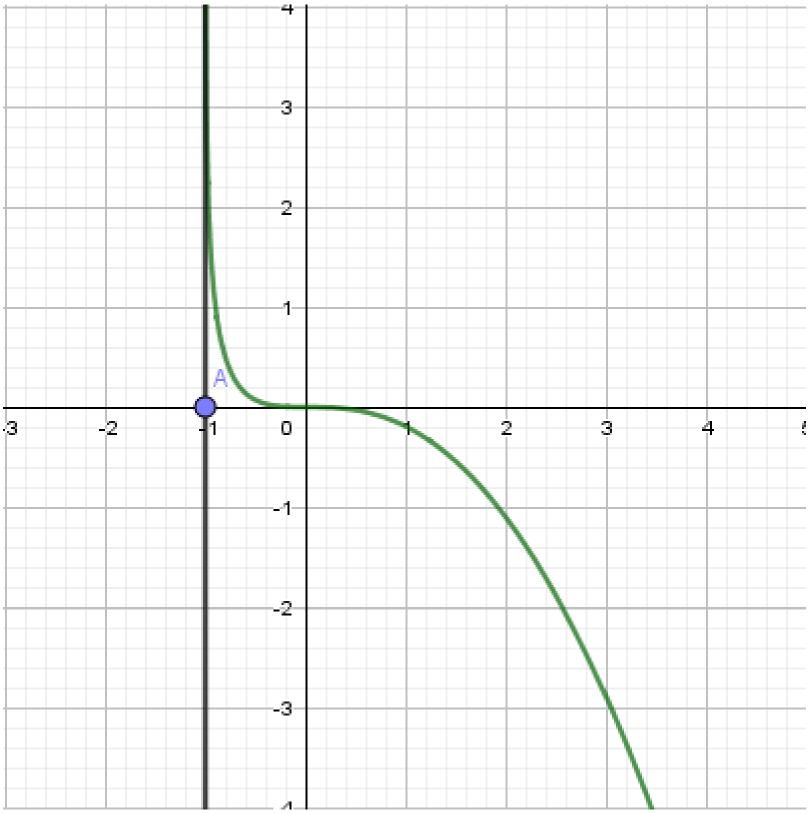
c- étudions les variations de f

$$f'(x)=1-x-\frac{1}{x+1}=\frac{-x^2}{x+1}$$

Puisque $x^2>0 \quad et \quad x>1$, donc $f'(x)>0$

Tableau de variation de f

x	-1		$+\infty$
f'(x)		-	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$



4-FONCTION LOGARITHME DE BASE A

4-1-DEFINITION

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction logarithme de base a est la fonction notée $\log_a$, et définie sur $]0,+\infty[$ par : $\log_a(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

4-2-PROPRIETE

i- $\log_a(a)=1;\log_a(1)=0$

ii-$\left(\forall x\in]0,+\infty[\right)\left(\forall y\in]0,+[\right)$ on a : $\log_a(x\times y)=\log_a(x)+\log_a(y)$; $\log_a(\frac{1}{x})=-\log_a(x)$

$\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$; $\log_a(x^r)=r\log_a(x)$ $\left(\forall r\in\mathbb{Q}\right)$

iii-$\left(\forall x\in]0,+\infty[\right)\left(\forall y\in\mathbb{R}\right)$ $\log_a(x)=y\Leftrightarrow x=a^y$

4-3-FONCTION LOGARITHME DECIMAL

4-3-1-DEFINITION

La fonction logarithme décimal est la fonction logarithme de base 10, on la note par log au lieu de $\log_{10}$, $\left(\forall x\in]0,+\infty[\right);\log(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$

4-3-2-PROPRIETE

i- la fonction vérifie les mêmes propriétés que la fonction logarithme

ii- log(10)=1 ; $\left(\forall r \in \mathbb{Q}\right); \log(10^{r}) = r$

iii-$\left(\forall x \in]0,+\infty[\right)\left(\forall y \in \mathbb{R}\right); \log(x) = y \Leftrightarrow x = 10^{y}$

4-4-EXERCICE

1- simplifier les expressions suivantes :

$A = \log_2(8) - \log_2(\sqrt[3]{32}) + \log_2(9) - \log_2(3)$

$B = \log_3(\frac{15}{4}) + \log_3(\frac{1}{27}) + \log_3(\frac{4}{5})$

$C = \log(100) - \log(10^{230}) + \log(\frac{1}{10^{120}})$

2-soient a et b deux réels de $]1,+\infty[$, montrer que : $\log_b(a) = \dfrac{1}{\log_a(b)}$

3- résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$\log(x+3) + \log(x) = 1$

$(\log x)^2 + 2\log x - 3 = 0$

SOLUTION

1-

$$B = \log_3\left(\frac{15}{4}\right) + \log_3\left(\frac{1}{27}\right) + \log_3\left(\frac{4}{5}\right) = \log_3(15) - \log_3(4) - \log_3\left(3^3\right) + \log_3(4) - \log_3(5)$$
$$= \log_3(5\times 3) - 3\log_3(3) - \log_3(5) = \log_3(5) + \log_3(3) - 3\log_3(3) - \log_3(5) = -2$$

$$A = \log_2(8) - \log_2\left(\sqrt[3]{32}\right) + \log_2(9) - \log_2(3) = \log_2\left(2^3\right) - \frac{1}{3}\log_2\left(2^5\right) + \log_2\left(3^2\right) - \log_2(3)$$
$$= \frac{4}{3} + \log_2(3)$$

$$C = \log(100) - \log\left(10^{230}\right) + \log\left(\frac{1}{10^{120}}\right) = \log\left(10^2\right) - 230\log(10) - \log\left(10^{120}\right)$$
$$= 2\log(10) - 230\log(10) - 120\log(10) = -340$$

2- On a $\log_b(a) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(b)}$ et $\log_a(b) = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$ donc $\log_a(b) \times \log_b(a) = 1$

D'où $\log_a(b) = \dfrac{1}{\log_b(a)}$

3- résolvons dans $\mathbb{R}$

a- déterminons $D = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x+3 > 0 \;\; et \;\; x > 0\right\} = \left]0,+\infty\right[$

$\log(x+3) + \log(x) = 1 \Leftrightarrow \log\left((x+3)x\right) = \log(10) \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$

$\Delta = 49 \;\; et \;\; (\;x = 2 \;\; ou \;\; x = -5)$, d'où $S = \{2\} \;\; car \;\; -5 \notin D$

b- déterminons $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0 \right\}$

on a $(\log x)^2 + 2\log x - 3 = 0$, on pose $X = \log x$, l'équation devient $X^2 + 2X - 3 = 0$
$\Delta = 16 \ et \ \ (X = 1 \ ou \ X = -3)$, d'où

$(\log x = 1 \ \ ou \ \ \log x = -3\,) \Leftrightarrow (\, x = 10 \ ou \ x = 10^{-3}\,) \ ; \ S = \{10 \ , \ 10^{-3}\}$

EXERCICE 1

considérons la fonction g définie par : $g(x)=1-\dfrac{1}{x^2}+\ln x$

1-déterminer le domaine de g, et calculer les limites aux bornes de D_g

2- étudier les variations de g, et déduire le signe de g(x)

3-tracer C_g

4- soit $f(x)=(1+\ln x)^2+\dfrac{1}{x^2}$

a- déterminer le domaine de f, et calculer les limites aux bornes de D_f

b-étudier les branches infinies de C_f

c-montrer que : $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right): f'(x)=2\dfrac{g(x)}{x}$

d- donner le tableau de variation de f

e- tracer C_f

EXERCICE 2

soit $g(x)=\dfrac{2}{x}-1+2\ln x$

1-déterminer le domaine de g, et calculer les limites aux bornes de D_g

2-étudier les variations de g

3-déduire que : $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)\ g(x)>0$

4- soit $f(x)=3-3x+2(x+1)\ln x$

a-déterminer D_f, et calculer les limites aux bornes de D_f

b- étudier les branches infinies de C_f

c- étudier les variations de f

d-étudier la concavité de C_f et déterminer la tangente de la courbe au point $I(1,0)$

e-tracer C_f

EXERCICE 3

soit $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$

1- déterminer D_f, et calculer les limites aux bornes de D_f

2-étudier les variations de f

3- tracer C_f

EXERCICE 4

Soit $\begin{cases} f(x)=x(\ln x-1)^2 ; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1-calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^2$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

2- étudier la dérivabilité de f à droite au point 0, donner une interprétation géométrique

3-montrer que : $f'(x)=(\ln x-1)(\ln x+1)$; donner tableau de variation de f

4-étudier les branches infinies de (C_f), tracer (C_f)

EXERCICE 5

Considérons la fonction g définie par : $g(x)=2x^2+1-\ln x$

1-déterminer D_g et calculer les limites aux bornes de D_g

2-étudier les variations de g, et déduire que : $\left(\forall x\in D_g\right)\quad g(x)\succ 0$

3-étudier les branches infinies de g, et tracer C_g

4- on considère la fonction f définie par : $f(x)=2x-2+\dfrac{\ln x}{x}$

a- déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

b- étudier les branches infinies de C_f

c- montrer que : $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}g(x)$, donner le tableau de variation de f

d- calculer $f''(x)$, et déterminer le point d'inflexion de C_f

e- tracer C_f , $f(e^{\frac{3}{2}})\simeq 7,3$; $e^{\frac{3}{2}}\simeq 4.5$

EXERCICE 6

Considérons la fonction g définie par : $g(x)=x-\ln x$

1-déterminer D_g et calculer les limites aux bornes de D_g

2-étudier les variations de g, et déduire que : $\left(\forall x\in D_g\right)\quad g(x)\succ 0$

3-étudier les branches infinies de g, et tracer C_g

4- on considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x-\ln x}\,;x\neq 0 \\ f(0)=-1 \end{cases}$

a- déterminer D_f et montrer que f est continue à droite au point 0

b- calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c- montrer que f est dérivable à droite de 0, et déterminer la tangente à droite de 0

d- montrer que : $f'(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{(x-\ln x)^2}$, donner le tableau de variation de f

e- déterminer les points d'intersections de C_f et la droite y=1

f- montrer que C_f coupe l'axe des abscisses au point $a\in\left]\dfrac{1}{2},1\right[$

g-tracer C_f . Prend $e\simeq 2,7$, $\ln 2\simeq 0,7$,

EXERCICE7

I - Soit $g(x) = x - 1 - 2x\ln x$

1-calculer les limites de g en $+\infty$

2-a-étudier les variations de g

b-montrer que l'équation g(x)=0 admet une solution α tel que $\alpha \in]0, e^{-\frac{1}{2}}[$

c- déduire le signe de g

$II -$ Soit $f(x) = 1 + x - \dfrac{1}{x} - 2\ln x$

1-calculer les limites en 0 et en $+\infty$

2-étudier les branches infinies de f en $+\infty$

3- étudier les variations de f

4-a-vérifier que $f(x) - x = \dfrac{g(x)}{x}$

b-déduire la position relatives de C_f et la droite d'équation y=x

c-vérifier que $f(\alpha) = \alpha$ et tracer C_f posons $\alpha = 0,3$

$III -$ Soit $(u_n)_n$ une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1- montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \alpha < u_n < 1$

2- étudier la monotonie de $(u_n)_n$

3-en déduire que $(u_n)_n$ est convergente et calculer sa limite