1-GENERALITE SUR LES ENSEMBLES

1-1-DEFINITION

Un ensemble est une collection ou un groupement d'objets distincts, ces objets s'appellent les éléments de cet ensemble

Soit E un ensemble, quand a est un élément de E, on dit que a appartient à E, et on écrit $a \in E$. Si a n'appartient pas à E, on écrit $a \notin E$.

Un ensemble est dit vide s'il ne contient aucun élément, on le note par $\varnothing$

1-2-ENSEMBLE EN EXTENSION-EN COMPREHENTION

a-DEFINITION

i- un ensemble E peut être défini par extension c'est-à-dire en donnant la liste de ses éléments entre accolades

ii- un ensemble E peut être défini par compréhension c'est-à-dire par une propriété caractérisant ses éléments

b-EXEMPLE

1- soit E={a,b,c,d} ; F={1,6,4,8,99,125}

2- E= {2n ; n$\in \mathbb{N}$}

1-3-EGALITE DE DEUX ENSEMBLES

a-DEFINITION

Deux ensembles E et F sont dit égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments et on écrit

E=F signifie : $\forall x \;\; x \in E \Leftrightarrow x \in F$

b-EXEMPLE

Soient E= {$x \in \mathbb{R} \,/\, \left|x\right| \leq 1$ } et F=$\left[-1,1\right]$

2-SOUS-ENSEMBLE ; PARTIE D'UN ENSEMBLE

2-1- L'INCLUSION

a-DEFINITION

Soient E et F deux ensembles, E est dit inclus dans F si tout élément de E est un élément de F, on note $E \subset F$.

$E \subset F \Leftrightarrow \;\; x \in E \Rightarrow x \in F$

b-EXEMPLE

Soient $E = \;\; 2n \,/\, n \in \mathbb{N}$ et $F = \;\; 2n+1 \,/\, n \in \mathbb{N}$

On a $E \subset \mathbb{N}$ et $F \subset \mathbb{N}$

c-PROPRIETE

Pour tout ensemble E, F et G, on :

i- $E \subset F \;\; et \;\; F \subset G \;\; \Rightarrow \;\; E \subset G$

ii- $E \subset F \;\; et \;\; F \subset E \;\; \Leftrightarrow \;\; E = F$

iii- $\varnothing \subset E$ et $E \subset E$

2-2- LE COMPLEMENTAIRE D'UN ENSEMBLE

a- DEFINITION

Soit E un ensemble et A une partie de E. Le complémentaire de A de l'ensemble E est constitué de tous les éléments de n'appartenant pas à A, on le note C_E^A ou $\overline{A}$ tel que

$C_E^A = \;\; x \in E \,/\, x \notin A$

$x \in C_E^A \Leftrightarrow x \notin A \Leftrightarrow x \in \overline{A}$

b-EXEMPLE

Soient $E = \ 2n \,/\, n \in \mathbb{N}$ et $F = \ 2n+1 \,/\, n \in \mathbb{N}$ on a $E \subset \mathbb{N}$ et $F \subset \mathbb{N}$

$C_{\mathbb{N}}^{E} = F$

c-PROPRIETE

Soient A et B des parties de E

i- $C_{A}^{A} = \varnothing$; $\overline{\overline{A}} = A$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$; $A \cup \overline{A} = E$

ii- $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

<u>2-3-PARTIES D'UN ENSEMBLE</u>

a- DEFINITION

Toutes les parties d'un ensemble E forment un ensemble, on le note $\mathcal{P}\ E$, on l'appelle l'ensemble des parties de E. $A \in \mathcal{P}\ E \Leftrightarrow A \subset E$

b-EXEMPLE

Soit E={a,b,c} alors $\mathcal{P}\ E \ = \ \varnothing, \ a \ , \ b \ , \ c \ , \ a,b \ , \ a,c \ , \ b,c \ , E$

3- LES OPERATIONS DANS $\mathcal{P}\ E$

3-1- L'INTERSECTION

a- DEFINITION

Soient A et B deux parties de E, l'intersection de A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B, on le note $A \cap B$

$x \in A \cap B \Leftrightarrow \ x \in A \ et \ x \in B$

$A \cap B = \ x \in E \,/\, x \in A.et.x \in B$

b-EXEMPLE

1-soient E={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} ; A={0,2,4,6,8} et B={0,3,6,9}

On a A∩B={0,6}

2-soient A=[-1,2] et B=[0,5] on a $A \cap B = \left[0,2\right]$

c-PROPOSITION

Soient A,B et C des parties de E, on a :

i- $A \cap A = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$

ii- $A \cap B = B \cap A$; $A \cap B \ \cap C = A \cap \ B \cap C$

iii- $A \cap B \subset A \ et \ A \cap B \subset B$

d- EXERCICE

Soient A et B deux ensembles, montrer que $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

3-2- LA REUNION

a-DEFINITION

Soient A et B deux parties d'un ensemble E, la réunion de A et B est l'ensemble constitué par les éléments de A et de B, on le note par $A \cup B$, on écrit

$A \cup B = \ x \in E \,/\, x \in A, ou, x \in B$

$x \in A \cup B \Leftrightarrow \ x \in A \ ou \ x \in B$

b-EXEMPLE

1-Soient E={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} ; A={0,2,4,6,8} ; B={0,3,6,9}

$A \cup B = \ 0,2,3,4,6,8,9$

2- soient A=[-1,2] et B=[0,5] ; on a $A \cup B = \left[-1,5\right]$

c-PROPRIETE

Soient A,B et C des parties de E

i- $A \cup B = B \cup A$; $A \cup B \ \cup C = A \cup \ B \cup C$

ii- $A \cup E = E$; $A \cup \varnothing = A$; $A \cup A = A$

iii- $A \subset A \cup B$; $B \subset A \cup B$

d-EXERCICE

Soient A et B deux parties de E, montrer que : $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

3-3-PROPRIETE DE LA REUNION ET DE L'INTERSECTION

Soient A,B et c des parties de E, on a :

i- $A \cup B \ \cap C = \ A \cap C \ \cup \ B \cap C$

ii- $A \cap B \ \cup C = \ A \cup C \ \cap \ B \cup C$

iii- lois de MORGAN

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

3-4-DIFFERENCE DE DEUX ENSEMBLES

a-DEFINITION

Soient A et B deux parties de E, on appelle différence de A et B est l'ensemble constitué par les éléments de A qui n'appartiennent pas à B, on le note A\B ou A-B

$A \setminus B = \ x \in E \,/\, x \in A, et, x \notin B$

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$

b-EXEMPLE

1-Soient E={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} ; A={0,2,4,6,8} ; B={0,3,6,9} on a

A\B={2,4,8} et B\A={3,9}

2- Soient A=[-1,2] et B=[0,5] on a

A\B=[-1,0[et B\A=]2,5]

c-PROPRIETE

Soient A,B et C des parties de E

i- A\B$\subset$ A

ii- $A \Delta B = \ A \setminus B \ \cup \ B \setminus \mathrm{A}$; $A \Delta B = \ A \cup B \ \setminus \ A \cap B$

iii- $A \Delta A = \varnothing$; $A \Delta \varnothing = A$

3-5-LE PRODUIT CARTESIEN

a-DEFINITION

Soient E et F deux ensembles, on appelle produit cartésien de E et F qu'on note ExF est l'ensemble des couples x, y tels que $x \in E$ et $y \in F$.

$E \times F = \ \ x, y \ / \, x \in E, et, y \in F$

b-EXEMPLE

Soient E et F deux ensembles tels que : E={0,1,2} et F={a,b}, on a

ExF={(0,a),(0,b),(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)}

4-EXERCICES

EX1 :

Soient A,B et C trois ensembles,

1-montrer que : $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$

2-montrer que : $\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \Rightarrow B \subset C$

3-montrer que : $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$

4-montrer que : $A \triangle B = A \triangle C \Rightarrow B = C$

5-montrer que : $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$

6-montrer que : $A \triangle B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \varnothing$; par l'absurde

7-montrer que : $A \triangle B \ \cap C = \ A \cap C \ \triangle \ B \cap C$