1-PROPOSITION

1-1-DEFINITION

Une proposition est un énoncé pouvant être vrai ou faux, on la note par P,Q....et les valeurs de vérité par :V , F ou 1,0

1-2-EXEMPLE

(P) : 1+3=4 est vraie
(Q) : $-2 \in \mathbb{N}$ est fausse
(R) : $1+\sqrt{2} > 2$ est vraie

1-3-FONCTION PROPOSITIONNELLE

1-3-1-DEFINITION

On appelle fonction propositionnelle tout énoncé contenant des variables appartenant à un ensemble E, et la fonction propositionnelle devient une proposition si on remplace les variables par des valeurs déterminées de E

1-3-2-EXEMPLE

P(x) : $x^2 - 1 \leq 0$
P(1) est vraie car $1^2-1=0 \leq 0$
P(2) est fausse car $2^2 - 1 = 3 \geq 0$

2-QUANTIFICATEURS

2-1-DEFINITION

Soit P(x) une fonction propositionnelle défini dans un ensemble E
i- la proposition « Pour tout élément x de E la proposition P(x) est vraie » s'écrit :
" $\forall x \in E$ P(x)"
ii- la proposition « il existe au moins un élément de E tel que la proposition P(x) est vraie» s'écrit " $\exists x \in E$ P(x)"

2-2-REMARQUE

Le symbole « $\forall$ » s'appelle le quantificateur universel et le symbole « $\exists$ » s'appelle le quantificateur existentiel

2-3-EXEMPLE

i-P(x) : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right) \quad x^2 \geq 0$ est une proposition vraie
ii-Q(x,y) : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)\left(\forall y \in \mathbb{R}\right) \quad x + y + 3 \geq 0$ est une proposition fausse
iii-R(x) : $\left(\exists x \in \mathbb{R}\right) \; 2x + 1 = 0$ est une proposition vraie

3-LES OPERATIONS SUR LES PROPOSITIONS

3-1-NEGATION D'UNE PROPOSITION

3-1-1-DEFINITION

On note la négation d'une proposition (P) par (nonP) ou $\left(\overline{P}\right)$, (nonP) est vraie si (P) est fausse, et (nonP) est fausse si (P) est vraie

3-1-2-TABLEAU DE VERITE

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

3-1-3-EXEMPLE

i-(P) : 3+1=5 $\left(\overline{P}\right)$: 3+1$\neq$ 5

ii-$\left(P\right): -2 \in \mathbb{N}$ $\left(\overline{P}\right): -2 \notin \mathbb{N}$

iii-$\left(P\right): 1+\sqrt{3} > 2$ $\left(\overline{P}\right): 1+\sqrt{3} \leq 2$

iv-$\left(Q\right):\left(\forall x \in E\right)\left(P(x)\right)$ $\left(\overline{Q}\right):\left(\exists x \in E\right)\left(\overline{P}(x)\right)$

v-$\left(Q\right):\left(\exists x \in E\right)\left(P(x)\right)$ $\left(\overline{Q}\right):\left(\forall x \in E\right)\left(\overline{P}(x)\right)$

3-2-DISJONCTION DE DEUX PROPOSITIONS

3-2-1-DEFINITION

On note la disjonction de deux propositions P et Q par « P ou Q » et elle est fausse si P et Q sont fausses et elle est dans les autres cas

3-2-2-TABLEAU DE VERITE

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

3-2-3-EXEMPLE

i-(P) :$\left(3 \in \mathbb{N}\right) ou$ (3 est impair)

ii-(Q) : (2 est pair) ou (2divise 3)

iii- (R) :$\left(-3 \in \mathbb{N}\right) ou \left(\sqrt{2} \in \mathbb{N}\right)$

3-3-CONJONCTION DE DEUX PROPOSITIONS

3-3-1-DEFINITION

La conjonction de deux propositions qu'on note « P et Q » est une proposition vraie si P et Q sont simultanément et fausse dans les autres cas

3-3-2-TABLEAU DE VERITE

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

3-3-3-EXEMPLE

i-(P) :(2 est pair) et (2 est premier)

ii-(Q) : $\left(-2 \in \mathbb{N}\right)$ et (-2 est solution de x+2=0)

iii-(R) : $\left(5 \leq 3\right)$ et (5 est pair)

3-4-IMPLICATION DE DEUX PROPOSITIONS

3-4-1-DEFINITION

La proposition ($\overline{P}$ ou Q) est notée $\left(P \Rightarrow Q\right)$ elle est fausse quand P est vraie et Q est fausse, elle se lit « P implique Q »

3-4-2-TABLEAU DE VERITE

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

3-4-3-EXEMPLE

i-(P) : $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ est une proposition fausse

ii-(Q) : $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ est une proposition vraie

iii- (R) : $x \geq 3$ et x premier $\Rightarrow$ x impair   est une proposition vraie

3-5-EQUIVALENCE DE DEUX PROPOSITIONS

3-5-1-DEFINITION

La proposition $\left(P \Rightarrow Q\right) et \left(Q \Rightarrow P\right)$ est notée $\left(P \Leftrightarrow Q\right)$, elle est vraie quand P et Q sont vraies ou fausses simultanément, elle se lit « P équivalent à Q »

3-5-2-TABLEAU DE VERITE

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

3-5-3-EXEMPLE

i-(P) : $x^2 = 1 \Leftrightarrow (x=1) ou (x=-1)$ est une proposition vraie

ii- (Q) : $x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$ est une proposition fausse

iii- (R) : n est pair $\Leftrightarrow$ 2 divise n est une proposition vraie

3-5-4-EXERCICE

1- soit $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$, déterminer le domaine de définition

2- résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation suivante : $x^2 - 1 = 0$

4- LES LOIS LOGIQUES

4-1-DEFINITION

Soit P une proposition composée de plusieurs propositions $Q_1, Q_2, \ldots\ldots\ldots, Q_n$, et reliées entre eux par des liens logiques (et, ou, non, $\Leftrightarrow, \Rightarrow$). On dit que P est une loi logique si P est vraie quelques soient les valeurs de vérités des propositions Q_1, $Q_2 \ldots\ldots\ldots, Q_n$

4-2-PROPRIETE

1- (P et Q)$\Leftrightarrow$ (Q et P)
2-(P et Q) et R$\Leftrightarrow$ P et (Q et R)
3-(P ou Q) $\Leftrightarrow$ (Q ou P)
4-(P ou Q) ou R $\Leftrightarrow$P ou (Q ou R)
5-(P$\Rightarrow$Q et Q$\Rightarrow$P)$\Leftrightarrow$(P$\Leftrightarrow$Q)
6- P et (Q ou R)$\Leftrightarrow$(P et Q) ou (P et R)
7- P ou (Q et R)$\Leftrightarrow$ (P ou Q) et (P ou R)

4-3-LOIS DE MORGAN

4-3-1-PROPRIETES

i-$\left(\overline{PetQ}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{P}ou\overline{Q}\right)$

ii-$\left(\overline{PouQ}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{P}et\overline{Q}\right)$

4-3-2-EXERCICE

1-Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2 - 3x + 2}$

2-résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système suivant

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

4-4- LE RAISONNEMENT DEDUCTIF

4-4-1-PROPRIETE

Soit P,Q et R des propositions : si P$\Leftrightarrow$ Q et Q$\Leftrightarrow$R alors P$\Leftrightarrow$R

4-4-2-EXERCICE

1-Soient x et y deux réels, montrer que : $\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}=\frac{x+y}{2} \Leftrightarrow x=2$ et $y=4$

2-Soient a et b deux réels, montrer que : $|a+b|<|1+ab| \Leftrightarrow (a^2-1)(b^2-1)>0$

4-4-3-PROPRIETE

Soient P(x) et Q(x) deux fonctions propositionnelles de variable x, E est un ensemble non vide, on a

i-$(\forall x\in E)(P(x) et Q(x)) \Leftrightarrow$ ($\forall x\in E \quad P(x)$) et ($\forall x\in E \quad Q(x)$)

ii-$(\exists x\in E)(P(x) ou Q(x)) \Leftrightarrow$ ($\exists x\in E \quad P(x)$) ou ($\exists x\in E \quad Q(x)$)

4-5-RAISONNEMENT PAR CONTRAPOSEE

4-5-1-PROPRIETE

Pour montrer que $(P \Rightarrow Q)$ proposition vraie, il faut et il suffit de montrer que $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ est une proposition vraie

4-5-2-EXEMPLE

Montrons que : $(x\neq 0) \Rightarrow \left(\sqrt{x+1}\neq \frac{x}{2}+1\right)$

4-6-RAISONNEMENT PAR DISJONCTION DES CAS

4-6-1-PROPRIETE

Soients P, Q et R des propositions, la proposition $[(P\Rightarrow R) et (Q\Rightarrow R)] \Rightarrow [(P ou Q)\Rightarrow R]$ est une loi logique

4-6-2-EXEMPLE

1-Montrons que n(n+1) est un nombre pair

2- résoudre et discuter selon les valeurs de l'équation suivante : $x^2-4x+m+3=0$

4-7-RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

4-7-1-PROPRIETE

Pour montrer $(P \Rightarrow Q)$ repose sur le principe suivant :

On suppose que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc $(P \Rightarrow Q)$ est vraie

4-7-2-EXEMPLE

Montrons que $\sqrt{2}\notin \mathbb{Q}$

4-8-RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

4-8-1-PRINCIPE DE RECURRENCE

Soit P(n) une proposition d'un entier naturel n, on suppose que :

i-P(0) est vraie

ii- Pour tout entier naturel n, si P(n) est vraie alors P(n+1) est vraie ; alors P(n) est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$

4-8-2-EXEMPLE

1- Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(1+2+3+4+.........+n=\frac{n(n+1)}{2}\right)$

2-Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})(2^n > n)$

3- Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $9^n - 1$ est divisible par 8

4-8-3-EXERCICE

Montrer par récurrence les expressions suivantes :

i-$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $1^2+2^2+.......+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ii- $(\forall n \in \mathbb{N})$ $2^n \geq n+1$

iii- $(\forall n \in \mathbb{N})$ $3^{2n}-2^n=7k$ avec $k \in \mathbb{N}$

EX1 :

1-déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes :

(P) : $(\exists x \in \mathbb{Q})(\exists y \in \mathbb{Q}) : y = \sqrt{x}$

(Q) : $(\exists x \in \mathbb{Q}) : x^2 = 3$

2-considérons la proposition suivante :

(R) : $(\forall y \in \mathbb{R}^*)(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 - xy + y^2 = 0$

a-déterminer la négation de (R)

b-montrer que (R) est fausse

EX2 :

Soient a,b et c des nombres réels tels que

$(\forall x \in \mathbb{R})\left|ax^2 + bx + c\right| \leq 1$

1-montrer que $|c| \leq 1$

2-montrer que $-1 \leq a + c \leq 1$

3- déduire que $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$

4-soient x,y,a et b des réels strictement positifs,

montrer que : $x \langle y \Leftrightarrow \frac{x}{y} < \frac{ax+by}{bx+ay} < \frac{y}{x}$

EX3 :

1-soient a, b et c des nombres réel, en utilisant la contraposée, montrer que :

$a + b > c \Rightarrow a > \frac{c}{2}$ ou $b > \frac{c}{2}$

2- soient a, b et c des réels de $[2, +\infty]$, en utilisant la contraposée, déduire que

$ab \leq c \Rightarrow a + b \leq c$

EX4 :

1-soit f(x)= $ax^2 + bx + c$, écrire f(x) sous forme canonique

2-soient x et y deux réels

a-montrer que $|x + y| \leq |x| + |y|$

b- si $|x| \leq \frac{1}{2}$ et $|y| \leq 1$, montrer que

$\left|4x^2 y - y - x\right| \leq \frac{17}{16}$

EX5 :

Soient a,b,c et d des réels strictement positifs

1-montrer que $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

2-montrer que $abcd \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$

3-déduire que $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$

EX6 :

Soient a et b deux réels strictement positifs

1-montrer que $\frac{2}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

2-soit a+b=1 et $n \in \mathbb{N}$

a-montrer que $ab \leq \frac{1}{4}$

b-montrer que $\left(1 + \frac{1}{a^n}\right)\left(1 + \frac{1}{b^n}\right) \geq \left(1 + 2^n\right)^2$

EX7 :

1-montrer par récurrence :

a-$(\forall n \in \mathbb{N})$ $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$

b-$(\forall n \in \mathbb{N})$ $2^{2n} + 15n - 1 = 9k$

c-$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

2-soit x un réel, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$

$x^n - 1 = (x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k$

3-soient x et y deux entiers relatifs

a- montrer que : x+y et x-y ont même parité

b-en utilisant le raisonnement par disjonction des cas, montrer que : $E\left(\frac{x+y}{2}\right) + E\left(\frac{y-x+1}{2}\right) = y$

EX8 :

Considérons la proposition suivante :

(P_n) : $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 \quad (\forall n \geq 2)$

1-montrer que : $(P_n) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

2-comparer : $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ et $\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n$

3-soit $x \rangle 0$ montrer par récurrence que : $(\forall n \geq 2)$

$(1 + x)^n \geq 1 + nx$

4- en déduire que $\forall n \geq 2$ on a (P_n)

EX1 Soient x,y et z des entiers relatifs tels que : $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=30$ Posons X=x-y, Y=y-z, Z=z-x 1-calculer : X+Y+Z 2-calculer XYZ 3-montrer que l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$	EX2 : Soient x et y deux réels positifs tels que x+y=a 1-montrer que : $xy \leq \frac{a^2}{4}$ 2-montrer que : $\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1} \leq 2\sqrt{2a+1}$ 3-soit α une solution de l'équation $x+\frac{1}{x}=3$ où α≥1 a-montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\alpha^{n+1}+\frac{1}{\alpha^{n+1}}=3\left(\alpha^n+\frac{1}{\alpha^n}\right)-\left(\alpha^{n-1}+\frac{1}{\alpha^{n-1}}\right)$ b-en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\alpha^n+\frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{N}$
EX3 : Soient x et y deux réels et (P) : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$ (Q) : x+y=0 1- montrer que : $\sqrt{x^2+1}>\|x\|$ 2-montrer que (P) $\Leftrightarrow$ (Q)	EX4 : 1-montrer par récurrence que :$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+........+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ 2-montrer par récurrence que :$(\forall n \in \mathbb{N})$ $21^n-2^{2n}=17k$ 3- montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ 1+3+5+........+(2n+1)=(n+1)^2
EX5 : 1-montrer que :$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\sqrt{\frac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$ 2-soient a et b deux entiers naturels tel que : a〉 b , montrer que : $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \notin \mathbb{N}$	EX6 : Soient a et b des réels et c un réel strictement positif 1-montrer que : $\|b\|<c$ et $\|a\|<c \Rightarrow \left\|\frac{a+b}{2}\right\|+\left\|\frac{a-b}{2}\right\|<c$ 2-montrer que : $\|a+b\|=\|a\|+\|b\| \Leftrightarrow ab \geq 0$ 3-déduire que : $\left\|\frac{a+b}{2}\right\|+\left\|\frac{a-b}{2}\right\|<c \Rightarrow \|b\|<c$ et $\|a\|\langle c$ 4-montrer par récurrence que :$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists a_n,b_n \in \mathbb{N})$ $\begin{cases}(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}\\ a_n{}^2-3b_n{}^2=1\end{cases}$
EX7 : Montrer par récurrence que : $(\forall n \geq 4)\quad 2^n \geq n^2$	EX8 : Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^8-x^5+x^2-x+1>0$ Discuter selon que : x≤0 ou 0<x≤1 ou x>1