1- NOTION DE FONCTION

1-1- DEFINITION

D_f est une partie non vide de $\mathbb{R}$. f est une fonction définie sur D_f , si on associe à chaque élément x de D_f un unique élément réel noté f(x)

i- D_f s'appelle l'ensemble de définition de la fonction f

ii- le nombre réel f(x) s'appelle l'image de x par f

on note: $\begin{array}{l} f : D_f \to \mathbb{R} \\ \quad x \ \mapsto f(x) \end{array}$

1-2- EXEMPLE

Déterminons l'ensemble de fonction de f définie par: $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

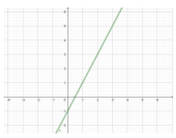
1-3-REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION

1-3-1- DEFINITION

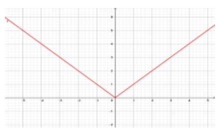
Le plan est rapporté à un repère $O,\vec{i},\vec{j}$, soit f une fonction numérique, et D_f sont ensemble de définition. La courbe représentative (ou la représentation graphique) de la fonction f dans le repère $O,\vec{i},\vec{j}$ est l'ensemble des points $M(x,f(x))$ où $x \in D_f$, elle est notée (C_f) . $C_f = \ M(x,f(x)) \ / \ x \in D_f$

1-3-2- EXEMPLE

1-considérons la fonction $f(x) = 2x - 1$



2-considérons la fonction $f(x) = |x|$



1-4-EXERCICE

1-Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants

$i-\quad f(x)=x^{2}+3x-4 \quad ; \quad f(x)=\dfrac{1}{x^{2}+3x-4}$

$ii-\quad f(x)=\dfrac{1}{3x-2} \quad , \quad f(x)=\dfrac{x}{|x|-2}$

$iii-\quad f(x)=\sqrt{x+2} \quad , \quad f(x)=\sqrt{2x^{2}-3x-2} \; ; \quad f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x}$

2- considérons la fonction $f(x)=3x-4$

i- déterminer le domaine de définition de f

ii- calculer f(-2) et f(1)

iii- construire la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $O,\vec{i},\vec{j}$

iv- déterminer x tel que f(x)=3

v- déterminer si les points A(2,2) et B(-3,-5) appartiennent à (C_f)

3- considérons la fonction $f(x)=|x+1|-2|x-1|$

i- déterminer D_f

ii- écrire f(x) sans valeur absolue

iii- tracer la courbe(C_f)

1-5- EGALITE DE DEUX FONCTIONS

1-5-1- DEFINITION

On dit que deux fonctions f et g sont égales, si elles ont le même domaine de définition D, et si pour tout x de D, on a f(x)=g(x) et on écrit f=g

1-5-1- EXEMPLE

$i-\quad f(x)=|x-1| \quad , \quad g(x)=\sqrt{x^{2}-2x+1}$

$ii-\quad f(x)=x-2 \quad , \quad g(x)=\sqrt{x^{2}-4x+4}$

1-5-2- EXECICE

Déterminer si f=g dans les cas suivants

$i-\quad f(x)=\dfrac{x^{2}-1}{x^{2}-x} \quad ; \quad g(x)=\dfrac{x+1}{x}$

$ii-\quad f(x)=\dfrac{\sqrt{x^{2}-1}}{x} \quad ; \quad g(x)=\sqrt{1-\dfrac{1}{x^{2}}}$

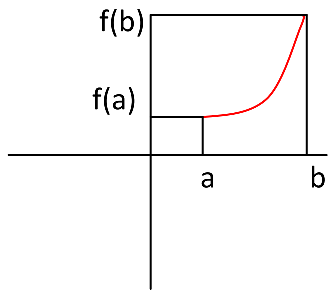
$iii-\quad f(x)=\dfrac{x^{3}+x}{x^{2}+1} \quad ; \quad g(x)=x$

2-SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

2-1-FONCTION CROISSANTE

2-1-1- DEFINITION

Soit f une fonction définie sur l'intervalle I, on dit que f est croissante sur I si et seulement si, pour tout x et y de I $\quad si \quad x \le y \; alors \quad f(x)\le f(y)$.



2-1-2- EXEMPLE

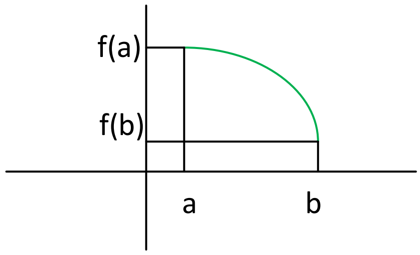
Considérons la fonction $f(x)=2x-3$

Tracer la courbe et montrer que f est croissante

2-2-FONCTION DECROISSANTE

2-2-1- DEFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, on dit que f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout x et y de I $si \ \ x \geq y \ \ \ alors \ \ \ \ f(x) \leq f(x)$



2- 2-2- EXEMPLE

Soit la fonction $f(x)=-2x+1$

Tracer la courbe et montrer que f est décroissante

2-3-MONOTONIE DE LA FONCTION

2-3-1- DEFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, on dit que f est monotone sur I, si elle est croissante ou décroissante sur I.

2-3-2- EXERCICE

1- soit $f(x)=2x^2-1$

i- déterminer D_f

ii- calculer f(1) et f(-2)

iii- déterminer x tel que f(x)=3

iv- étudier la monotonie de f sur $[0,+\infty[\ \ et \ \ ]-\infty,0]$

2- soit $f(x)=\cos x$

i- déterminer D_f

ii- étudier la monotonie de f sur $[0,\pi] \quad et \quad [-\pi,0]$

3- soit $f(x)=\sin x$

i- déterminer D_f

ii- étudier la monotonie de f sur $[-\pi,-\frac{\pi}{2}] \quad , \quad [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \quad et \quad [\frac{\pi}{2},\pi]$

4- soit $f(x)=\tan x$

i- déterminer D_f

ii- étudier la monotonie de f sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

2-4- TAUX DE VARIATION

2-4-1- DEFINITION

soit f une fonction numérique, et D_f son domaine de définition, x et y deux éléments différents de D_f. le nombre réel $T(x,y)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ est appelé le taux de variation de f entre x et y

2-4-2- PROPRIETE

Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle I, et T(x,y) son taux de variation, où x et y deux éléments différents de I.

$i-$ si $T(x,y) \geq 0$ $alors$ f est $croissante$ sur I

$ii-$ si $T(x,y) \leq 0$ $alors$ f est $décroissante$ sur I

2-4-3-EXEMPLE

Soit $f(x) = 2x^2 - 1$; pour tout x et y de $\mathbb{R}$, on a $T(x,y) = 2(x+y)$

$i-$ si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ $alors$ $2(x+y) \geq 0$, donc f est croissante sur $[0,+\infty[$

$ii-$ si $x \leq 0$ et $y \leq 0$ $alors$ $2(x+y) \leq 0$, donc f est décroissante sur $]-\infty,0]$

Tableau de variation:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	$\searrow$	-1	$\nearrow$

2-5-VALEUR MAXIMUM-VALEUR MINIMUM

2-5-1-DEFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et a un élément de I
i- on dit que f(a) est une valeur maximum de la fonction f sur I, si $f(x) \leq f(a)$ pour tout élément x de I
ii- on dit que f(a) est une valeur minimum de la fonction f sur I, si $f(x) \geq f(a)$ pour tout élément x de I

2-5-2-EXEMPLE

Considérons la fonction $f(x) = 2x^2 - 1$, on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \geq f(0)$

2-5-3-EXERCICE

1- soit $f(x) = x^2 - 6x + 5$
i- calculer le taux de variation entre x et y
ii- étudier la monotonie de f dans les intervalles $]-\infty,3]$ et $[3,+\infty[$
iii- donner le tableau de variation de f, puis déduire les valeurs maximum et minimum s'ils existent

2- soit $f(x) = -x^2 + 2x + 3$
i- calculer le taux de variation entre x et y
ii-étudier la monotonie de f dans les intervalles $]-\infty,1]$ et $[1,+\infty[$
iii- donner le tableau de variation de f, puis déduire les valeurs maximum et minimum s'ils existent

3- FONCTION PAIRE- FONCTION IMPAIRE

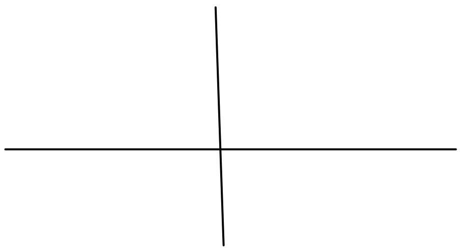
3-1- FONCTION PAIRE

3-1-1-DEFINITION

soit f une fonction et D son domaine de définition, on dit que f est paire si et seulement si:
i- pour tout x de D, (-x) est un élément de D
ii- pour tout x de D, f(-x)=f(x)

3-1-2- PROPRIETE

Soient f un fonction, D son domaine de définition et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $O,\vec{i},\vec{j}$. f est paire si (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées



3-1-3- EXEMPLE

Soit $f(x)=x^2$

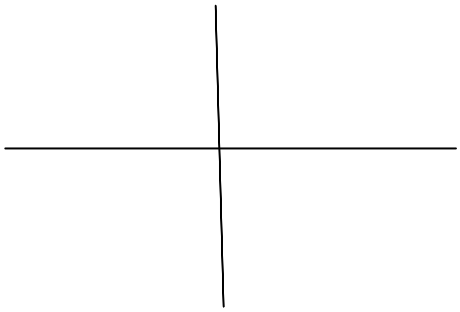
3-2- FONCTION IMPAIRE

3-2-1- DEFINITION

soit f une fonction et D son domaine de définition, on dit que f est impaire si et seulement si:
i- pour tout x de D, (-x) est un élément de D
ii- pour tout x de D, f(-x)=-f(x)

3-2-2-PROPRIETE

Soient f un fonction, D son domaine de définition et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $O,\vec{i},\vec{j}$. f est impaire si (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des abscisses



3-2-3-EXEMPLE

Soit $f(x)=x\left|x\right|$

3-3-MONOTONIE ET PARITE DE LA FONCTION

3-3-1- DEFINITION

Soient f une fonction, et D son domaine de définition symétrique par rapport au nombre 0, et I un intervalle de $D\cap\mathbb{R}^+$, et I' son symétrique par rapport au nombre 0

1- f est paire
 i- si f est croissante sur I , alors elle est décroissante sur I'
 ii- si f est décroissante sur I , alors elle est croissante sur I'
2- si f est impaire, alors f a la même sens de variation sur $I\,et\,I'$

3-3-2- EXERCICE

1- Soit $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

i- déterminer D_f, et étudier la parité de f
ii- calculer le taux de variation de f entre x et y
iii- étudier la monotonie de f sur les intervalles $]0,1]\ et\ [1,+\infty[$
iv- donner le tableau de variation de f, déduire les valeurs maximum et minimum s'ils existent

2- Soit $f(x)=x^2-4\left|x\right|+3$

i- déterminer D_f, et étudier la parité de f
ii- calculer le taux de variation de f entre x et y
iii- étudier la monotonie de f sur les intervalles $[0,2]\ et\ [2,+\infty[$
iv- donner le tableau de variation de f, déduire les valeurs maximum et minimum s'ils existent

4- ETUDE DES FONCTIONS PARTICULIERES

4-1- ETUDE DE f(x)=ax^2+bx+c

4-1-1- EXERCICE

Soit $f(x) = x^2 - 2x - 3$

1-Déterminer D_f

2- Calculer le taux de variation de f entre x et y

3- Etudier la monotonie de f sur les intervalles $]-\infty, 1] \;\; et \;\; [1, +\infty[$

4- Donner le tableau de variation de f

5- Déterminer les points d'intersection de la courbe (C_f) et les axes des abscisses et des ordonnées

6- Calculer f(-2) et f(4), tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $O, \vec{i}, \vec{j}$

4-1-2- PROPRIETE

Considérons la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$

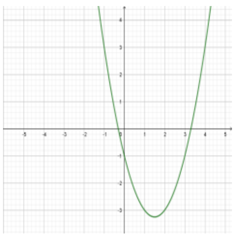
1- le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$

2- $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ est la forme canonique de f

3- la courbe (C_f) est une parabole de sommet $\left(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a})\right)$

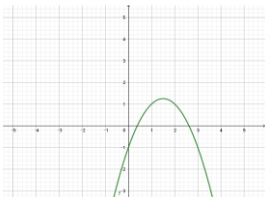
4- si $a > 0$ alors le tableau de variation de f est:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	↘	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	↗



5- si $a < 0$ alors le tableau de variation de f est

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f(x)		$\nearrow$	$f(\dfrac{-b}{2a})$	$\searrow$	



4-2- ETUDE DE LA FONCTION HOMOGRAPHIQUE : $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

4-2-1- EXERCICE

Soit $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$

1- Déterminer D_f

2- Déterminer les réel a et b tels que $f(x)=a+\dfrac{b}{x+1}$

3- Calculer le taux de variation de f entre x et y

4- Etudier la monotonie de f sur les intervalles $]-\infty,-1[\ et\ ]-1,+\infty[$

5- Donner le tableau de variation de f

6- Déterminer les points d'intersection de la courbe (C_f) et les axes des abscisses et des ordonnées

7- Tracer dans un repère orthonormé $O,\vec{i},\vec{j}$

4-2-1- PROPRIETE

Considérons la fonction $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

1- le domaine de définition est $D_f=\left]-\infty,-\dfrac{d}{c}\right[\cup\left]-\dfrac{d}{c},+\infty\right[$

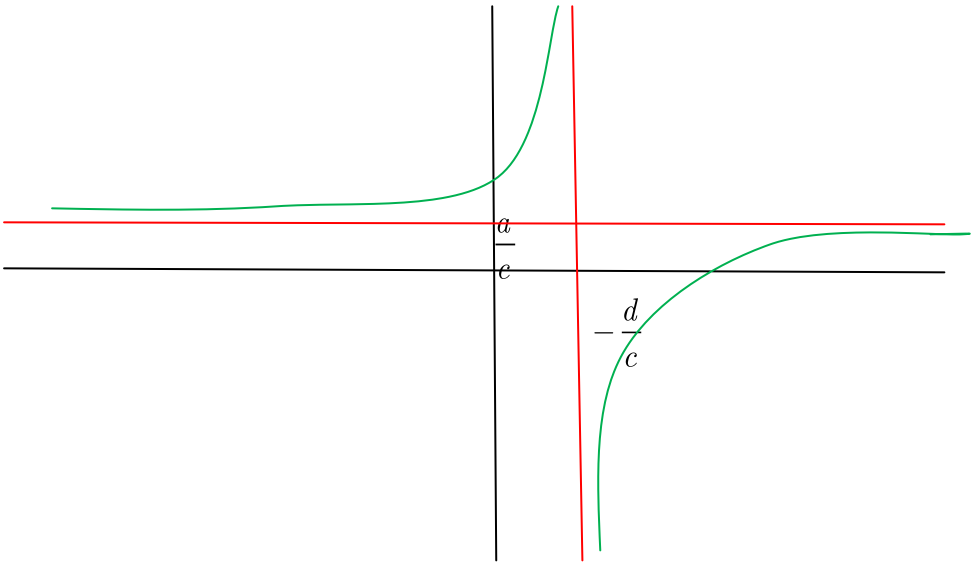
2- on peut écrire f sous forme de $f(x)=\alpha+\dfrac{\beta}{cx+d}$, où $\alpha\ et\ \beta$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $ax+b\ par\ cx+d$

3- la courbe (C_f) est hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes $x=-\frac{d}{c}\ et\ y=\frac{a}{c}$

4- on calcule $\delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$

i- $si\quad \delta>0$ alors le tableau de variation de f est le suivant:

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
f(x)	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$



ii- si $\delta<0$ alors le tableau de variation est le suivant:

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
f(x)	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$