1- L'ORDRE DANS R

1-1- DEFINITION

Soient a et b deux réels, on dit que a est plus petit ou égal à b, et on écrit $a \leq b$ si $a-b$ est négatif $a-b \leq 0 \quad ou \quad a-b \in \mathbb{R}_-$

1-2-PROPRIETE

i- pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $x \leq x$

ii- pour tous x et y de $\mathbb{R}$: si $x \leq y \text{ et } y \leq x \text{ alors } x = y$

iii- pour tous x, y et z de $\mathbb{R}$: si $x \leq y \text{ et } y \leq z \text{ alors } x \leq z$

1-3- EXERCICE

1- comparer $\frac{7}{8} \text{ et } \frac{2}{3}$

2- comparer $2\sqrt{5} \text{ et } 5\sqrt{2}$

3- Soit n un entier naturel non nul, comparer les nombres: $\frac{2n-1}{2n} \text{ et } \frac{2n}{2n+1}$

4- Soient a et b deux réels strictement positifs

i- comparer: $a^2+b^2 \text{ et } 2ab$

ii- déduire que: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$

iii- déduire que: $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geq 4$

1-4- L'ORDRE ET L'ADDITION

a-PROPRIETE

Soient a, b et c des réels, on a:

i- $si \quad a \leq b \quad alors \quad a \pm c \leq b \pm c$

ii- $si \quad a \leq b \text{ et } c \leq d \quad alors \quad a+c \leq b+d$

b- EXERCICE

Comparer $\frac{1}{3}+\sqrt{3} \quad et \quad \frac{2}{5}+\sqrt{5}$

1-5- L'ORDRE ET LA MULTIPLICATION

a-PROPRIETE

Soient a, b, c et d des réels, on a:

i- $si \ a \leq b \text{ et } c \geq 0 \quad alors \quad ac \leq bc$

ii- $si \quad a \leq b \text{ et } c \leq 0 \quad alors \quad ac \geq bc$

iii- $si \quad 0 \leq a \leq b \quad et \quad 0 \leq c \leq d \quad alors \quad 0 \leq ac \leq bd$

b- EXERCICE

1- Soient a et b deux réels positifs tels que $a \leq b$, comparer $a^2 \text{ et } b^2$

2- Soient a et b deux réels négatifs tels que $a \leq b$, comparer $a^2 \text{ et } b^2$

1-6- L'ORDRE ET L'INVERSE D'UN NOMBRE

a- PROPRIETE

Soient a et b deux réels, on a:

i- $si\ \ 0<a\leq b\quad alors\quad 0<\dfrac{1}{b}\leq\dfrac{1}{a}$

ii- $si\ \ a\leq b<0\quad alors\quad \dfrac{1}{b}\leq\dfrac{1}{a}<0$

b-EXERCICE

1- Soit x un réel tel que $0<\dfrac{1}{2x+1}<\dfrac{3}{2}$, montrer que $x>-\dfrac{1}{6}$

2- Soient a et b deux réels tels que $0<a<b$

i- posons $A=\dfrac{a^2+a}{a^2+a+1}\quad et\quad B=\dfrac{b^2+b}{b^2+b+1}$, comparer A et B

ii- posons $E=\sqrt{a}-\sqrt{b}\ \ et\quad F=\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}$, comparer E et F

2- LA VALEUR ABSOLUE

2-1- DEFINITION

On appelle valeur absolue d'un nombre réel x, et on note $|x|$ le nombre réel tel que:

i- $|x|=x\quad si\quad x\geq 0$

ii- $|x|=-x\quad si\quad x\leq 0$

2-2-PROPRIETE

Soient x et y deux réels, on a:

i- $|x\times y|=|x|\times|y|\ \ ;\ \ |-x|=|x|\ \ ;\ \ |x|\geq 0\ \ ;\ \ x^2=|x^2|=|x|^2$

ii- $si\quad y\neq 0\quad alors\quad \left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$

iii- $|x+y|\leq|x|+|y|\quad ;\ \ |x|-|y|\leq|x-y|\ ;\ \ -|x|\leq x\leq|x|$

iv- $si\quad |x|=|y|\quad alors\quad x=y\ \ ou\ \ x=-y$

2-3- EXERCICE

1-calculer $|2-\sqrt{3}|\quad et\quad \left|\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{5}\right|$

2- Soient x et y deux réels, on pose $A=|x|+|-2-y|\quad et\quad B=|x(2+y)|-|x||y+1|$,

calculer A et B si $x=-2\ \ et\ \ y=3$

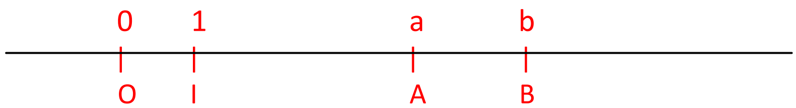
3- résoudre dans $\mathbb{R}$ les équation suivantes :

$|2x+1|=3\ ;\ \ |x+3|=|5x-4|\ \ et\quad |x-1|=-2$

2-4- LA DISTANCE ENTRE DEUX REELS

2-4-1- DEFINITION

Si a et b sont respectivement les abscisses des points A et B sur un axe normé, alors la distance entre les réels a et b est la distance entre les points A et B, on note $AB=|b-a|$



2-4-2- EXERCICE

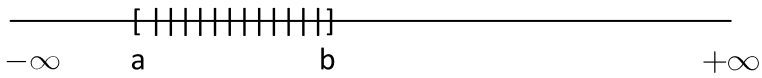
Soient 3, 1 et x les abscisses respectivement des points A, B et M sur un axe normé, calculer $MA+MB$ en fonction de x

3- LES INTERVALLES

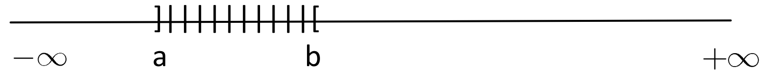
3-1- PROPRIETE

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$ et (D) un axe normé

i- $\left[a,b\right] = \quad x \in \mathbb{R} \;/\; a \leq x \leq b$ appelé intervalle fermé

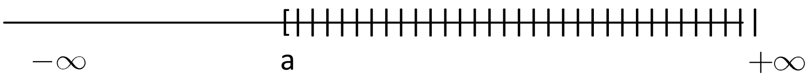


ii- $\left]a,b\right[= \quad x \in \mathbb{R} \;/\; a < x < b$ appelé intervalle ouvert

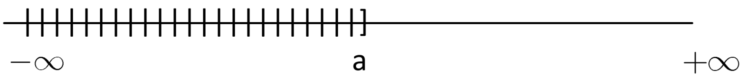


iii- $]a,b] = \quad x \in \mathbb{R} \;/\; a < x \leq b$ et $[a,b[= \quad x \in \mathbb{R} \;/\; a \leq x < b$ appelé intervalle semi-ouvert ou semi-fermé

iv- $[a,+\infty[= \quad x \in \mathbb{R} \;/\; x \geq a$ appelé demi-droite fermé à gauche



v- $\left]-\infty,a\right] = \quad x \in \mathbb{R} \;/\; x \leq a$ appelé demi-droite fermé à droite



3-2- INTERVALLE ET VALEUR ABSULUE

3-2-1- PROPRIETE

Soient a et r deux réels tels que $r > 0$, pour tout réel x, les relations suivantes sont équivalentes:

i- $\left|x-a\right| < r$ ii- $-r < x-a < r$ iii- $a-r < x < a+r$ iv- $x \in \left]a-r,a+r\right[$

r est le rayon et a est le centre de l'intervalle $\left]a-r,a+r\right[$

3-2-2- EXERCICE

Ecrire sous forme d'intervalle les ensembles suivants

1- $A = \quad x \in \mathbb{R} \;/\; x \neq 1$; $B = \quad x \in \mathbb{R} \;/\; x \neq 2 \quad et \quad x \neq -2$

2- $C = \quad x \in \mathbb{R} \;/\; \; x \geq 3 \quad ou \quad x \leq -1$; $D = \quad x \in \mathbb{R} \;/\; x \neq 2 \quad et \quad x \geq -3$

3- $E = \quad x \in \mathbb{R} \;/\; \; x \leq 3 \quad et \quad x \geq -1$

4- soit a un réel, déterminer les ensembles suivants: $\left[a,a\right]$; $\left[a,a\right[$; $\left]a,a\right[$

4- L'ENCADREMENT

4-1- DEFINITION

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$, les doubles inégalités suivantes:
$a < x < b$, $a \leq x \leq b$, $a < x \leq b$ et $a \leq x < b$ sont appelées des encadrements de x d'amplitude $b-a$

4-2- EXEMPLE

i- $1 < \sqrt{2} < 2$ est un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude 1 ii- $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ est un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude $0,1$

4-3- PROPRIETE

1- $si \quad a \le x \le b \quad et \quad c \le y \le d \quad alors \qquad a+c \le x+y \le b+d$

2- $si \quad 0 \le a \le x \le b \quad et \quad 0 \le c \le y \le d \quad alors \quad 0 \le ac \le xy \le bd$

3- $si \quad 0 < a \le x \le b \quad et \quad 0 < c \le y \le d \quad alors \quad 0 < \frac{1}{d} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{c} \quad et \quad \frac{a}{d} \le \frac{x}{y} \le \frac{b}{c}$

4-4- EXERCICE

Soient x et y deux réels tels que $1 \le x \le 2 \quad et \quad \frac{1}{2} \le y \le \frac{3}{2}$, posons $E = x^2 - y^2 + x + y$

1- donner un encadrement de E

2- montrer que $E = \ x+y \quad x-y+1$ et déduire un autre encadrement de E

3- déduire que: $\frac{3}{4} \le E \le \frac{29}{4}$

5- LES APPROXIMATIONS

5-1- APPROXIMATION PAR EXCES OU PAR DEFAUT

5-1-1- DEFINITION

Soit $a \le x \le b$ un encadrement de x d'amplitude $b-a$
i- le nombre a est appelé une approximation par défaut de x d'amplitude b-a
ii- le nombre b est appelé une approximation par excès de x d'amplitude b-a

5-1-1- EXEMPLE

1- $1,4 \le \sqrt{2} \le 1,5$ un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude 0,1

2- $3,14 \le \pi \le 3,15$ un encadrement de π d'amplitude 0,01

5-2- VALEUR APPROCHEE

5-2-1-DEFINITION

Soit x un réel et r un réel strictement positif. Tout nombre réel a vérifiant l'une des relations suivantes: $\left|x-a\right| \le r \quad ou \quad \left|x-a\right| < r$ est appelé approximation ou une valeur approchée de x d'amplitude 2r (ou de r prés)

5-2-2- EXEMPLE

On a $\left|\sqrt{5} - 2,23\right| < 0,01$; 2,23 est valeur approchée de $\sqrt{5}$ au 0,01 prés

5-2-3- EXERCICE

1- a- Comparer $2\sqrt{7} \quad et \quad 3\sqrt{3}$

b- Développer $3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}\ ^{2}$

c- On pose $m = \sqrt{55 - 12\sqrt{21}}$, simplifier m

d- On considère que $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ et $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$; donner une approximation du nombre m par excès et par défaut d'amplitude 0,5

2- Soit a un réel tel que $a > \frac{68}{15}$; on pose $x = \frac{5a^2\sqrt{3}}{8} \quad et \quad y = \frac{a(7+\sqrt{3})}{2}$

i- Comparer x et y

ii- On considère que $1,73 < \sqrt{3} < 1,74 \quad et \quad a = 5$; montrer que 21,85 est une valeur approchée à y au 0,05 prés

iii- Montrer que $\left|x - 27.1\right| < 0,1$

5-4- APPROXIMATION DECIMALE

5-4-1- DEFINITION

Soit x un réel tel que $N \times 10^{-p} < x < (N+1) \times 10^{-p}$ où $N \in \mathbb{Z} \quad et \quad p \in \mathbb{N}$

i- le nombre $N \times 10^{-p}$ est appelé une approximation décimale par défaut au nombre x au 10^{-p} prés

ii- le nombre $(N+1) \times 10^{-p}$ est appelé une approximation décimale par excès au nombre x au 10^{-p} prés

5-4-2- EXEMPLE

On a $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ on peut cet encadrement de cette façon:

$141 \times 10^{-2} < \sqrt{2} < 142 \times 10^{-2}$

5-4-3- EXERCICE

On pose $m = \dfrac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$ on considère que $2,64 < \sqrt{7} < 2,65 \quad et \quad 1,73 < \sqrt{3} < 1,74$

Donner une approximation décimale d'amplitude 10^{-2} par excès et par défaut au nombre m

6-EXERCICE

EX1

Soient a et b deux réels tels que
$a \geq 2$, $b \leq -1$ et $a-b=6$

1- calculer $A=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(b+1)^2}$

2- Montrer que $a \leq 5$ et $b \geq -8$

3- Déterminer la valeur de B telle que
$B=\left|a+b-4\right|+\left|a+b+10\right|$

EX2

Soient $-3<x<4$ et $-1<y<2$

1- Déterminer un encadrement de xy

2- déterminer un encadrement de x^2 et y^2

EX3

Soit x un réel tel que $x>1$

1- Montrer que:
$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\frac{1}{2\sqrt{x}}<\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$

2- On pose: $A=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+.....+\frac{1}{\sqrt{10^4}}$

montrer que $10^2<A<2\times10^2$

EX4

Soit a un réel de l'intervalle $\left[1,+\infty\right[$, on pose:
$A=\sqrt{1+\frac{1}{a}}$

1- montrer que: $a(A+1)(A-1)=1$

2- montrer que: $2 \leq 1+A \leq 3$

et déduire que : $1+\frac{1}{3a} \leq A \leq 1+\frac{1}{2a}$

3- Montrer que 1,1 est une valeur approchée de
$\sqrt{1,2}$ au $\frac{1}{30}$ prés

EX5

Soit x un réel non nul et $E=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

1- Montrer que: $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{x}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$

2- Montrer que : $\sqrt{1+x^2}+1 \geq 2$

3- Déduire que: $\left|E-\frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{2}\left|x\right|$

4- Déterminer une valeur approchée à
$\frac{\sqrt{1,0001}}{0,01}$ au 5×10^{-3} prés

EX6

soient a et b deux réels tels que
$0<a \leq b \leq 2a$

1- Montrer que: $(a-b)(2a-b) \leq 0$

2- posons $A=\frac{2a^2+b^2}{3ab}$

i- développer:
$(a\sqrt{2}-b)$ et $(a-b)(2a-b)$

ii- Montrer que: $\frac{2\sqrt{2}}{3} \leq A \leq 1$

iii- Montrer que: $\frac{(1+\sqrt{2})^2}{6}$ est une valeur approchée à A au $\frac{(1-\sqrt{2})^2}{6}$ prés

EX7

Soit n un entier naturel non nul, monter que: $\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}>\frac{1}{n}$

EX8