

LES ENSEMBLES: N-Z-Q-R

1- INTRODUCTION

L'ensemble des entiers naturels se note \mathbb{N} tel que: $\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

L'ensemble des entiers relatifs se note \mathbb{Z} tel que: $\mathbb{Z} = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

L'ensemble des nombres rationnels se note \mathbb{Q} tel que $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / \begin{array}{l} a \in \mathbb{Z}, \\ b \in \mathbb{N}^* \end{array} \right\}$

L'ensemble des nombres réels se note \mathbb{R}

2- LES OPERATIONS SUR \mathbb{R}

2-1- PROPRIETES DE L'ADDITION

L'addition dans \mathbb{R} vérifie les propriétés suivantes:

- Elle est commutative: pour tout a et b de \mathbb{R} , on a: $a + b = b + a$
- Elle est associative: pour tout a, b et c de \mathbb{R} , on a: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Elle admet un élément neutre 0: pour tout a de \mathbb{R} , on a: $a + 0 = 0 + a = a$
- Tout élément a de \mathbb{R} admet un symétrique (opposé) $(-a)$ tel que $a + (-a) = (-a) + a = 0$

2-2- PROPRIETES DE LA MULTIPLICATION

La multiplication dans \mathbb{R} vérifie les propriétés suivantes:

- Elle est commutative: pour tout a et b de \mathbb{R} , on a $a \times b = b \times a$
- Elle est associative: pour tout a, b et c de \mathbb{R} , on a $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
- elle admet un élément neutre 1: pour tout a de \mathbb{R} , on a $a \times 1 = 1 \times a = a$
- Tout élément a de \mathbb{R}^* , admet un symétrique (inverse) $\frac{1}{a}$ tel que: $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$

2-3- PROPRIETE DE L'ADDITION ET DE LA MULTIPLICATION

La multiplication est distributive par rapport à l'addition: pour tout a, b et c de \mathbb{R} , on a :
 $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

2-4- EXERCICE

1- Calculer $A = \frac{5}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - 3$ et $B = \frac{3 - \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}{1 + \frac{2}{3}}$

2- Soient a, b et c des réels, calculer: $A = 3(a + b - c) - 2(a - b - 2c) + 6(2a - b)$ et
 $B = 3a - 2 - 2[(a - 2b) - 3(3a + 2b)]$

2-5- LES IDENTITES REMARQUABLES

2-5-1- PROPRIETE

Pour tous réels a et b on a:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

2-5-2- EXERCICE

1- Développer

$$(a + b)^3, \quad (a - b)^3, \quad (a - b)(a^2 + ab + b^2), \quad (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

2- Développer et réduire les expressions suivantes: $(2a + 3)^3$, $(2a - 3b)^3$, $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^3$

$$(a + b + c)^2, \quad (a - b + c)^2$$

3- Factoriser les expressions suivantes:

$$(2x - 1)^2 - (4 - 8x)(x + 3) + (3 - 12x^2)$$

2-6- LES PUISSANCES

2-6-1-PROPRIETE

Pour tous réels a et b ($b \neq 0$) et pour tous entiers naturels n et m, on a :

$$- a^n \times a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{n \times m}, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$- (a \times b)^n = a^n \times b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ et } b^0 = 1$$

2-6-2- EXERCICE

1- Calculer: $A = 3^{-2} + \frac{1}{6}$, $B = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} + \left(-\frac{3}{4}\right)^2$

2- Soient a et b deux réels non nuls, calculer et simplifier les expressions suivantes:

$$A = a^3 a^{-5} + (b^2)^4, \quad B = \left[\frac{(a^{-2} b^{-1})^2}{(a^2 b)^{-1}}\right]^3$$

2-6-3- PROPRIETE

a-DEFINITION

- Soit n un entier naturel, on a : $10^n = 10000 \dots 0$, il y a n fois 0

- Tout nombre décimal positif peut s'écrire sous forme de $a \times 10^n$ où a est un décimal tel que $1 < a < 10$ et $n \in \mathbb{Z}$

b- EXEMPLE

$$0,000132 = 1,32 \times 10^{-4}; \quad 543000 = 5,43 \times 10^5$$

c- EXERCICE

Ecrire les nombres suivants sous forme d'écriture scientifique:

$$a = 3600 \times 20000, \quad b = 200 \times 0,00005, \quad c = 13 \times 10^{-7} \times 0,04$$

3- LES RACINES CARREES

3-1-PROPRIETE

i- Pour tous réels positifs a et b, on a :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b} \text{ et } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ et } \sqrt{a^2} = a$$

ii- Pour tout réel a, on a: $\sqrt{a^2} = |a|$

3-2-EXERCICE

1- Calculer $\sqrt{64}$, $\sqrt{4^3 \times 5^2}$, $\sqrt{\frac{121}{169}}$

2- rendre rationnel le dénominateur de la fraction suivante:

$$a = \frac{2 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}}, \quad b = \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$$

3- calculer $1 - \sqrt{2}^2$ et déduire $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

EX1

1- calculer $A = \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}$

2- simplifier l'écriture suivante:

$$B = \frac{1 - \frac{1}{2n}}{1 + \frac{1}{2n}} \times \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$$

où n est un entier naturel non nul

3-soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, simplifier l'expression

suyvante: $A = \frac{1}{x-1} - \frac{1 - \frac{1}{x-2}}{1 + \frac{1}{x-2}}$

EX2

1- calculer $A = \left(\frac{1}{8}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^6 \left(-\frac{5}{2}\right)^4$;

$$B = \left(\frac{3}{5}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^5 ;$$

$$C = \frac{3^2 \times 11^5}{3^{-4} \times 11^3} \times \frac{33^{15}}{3^2 \times 11}$$

2- déterminer les entiers naturels a, b et c tel que: $2^a \times 3^b \times 5^c = 6480$

EX3

Factoriser les expressions suivantes:

$$A = (4x + 1)^2 - 9$$

$$B = 4x^2 - 9 + 3(2x + 3)^2$$

$$C = (2x - 3)^3 - x^3 - 9(x - 3)$$

$$D = x^3 - 8 + 4(x^2 - 4) - 3x + 6$$

EX4

1-rendre rationnel le dénominateur des fractions suivantes:

$$\frac{2}{\sqrt{3}-2} ; \quad \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

2- calculer

$$A = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} + \sqrt{6} + \sqrt{5}^{-1}$$

3- a- calculer $1 + \sqrt{5}^2$; $2 - \sqrt{5}^2$

b- simplifier: $\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{9-4\sqrt{5}}$

c- montrer que $A \in \mathbb{N}$ tel que

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$$

EX5

1- construire un segment de longueur $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$

2- on pose $a = \sqrt{3} + 1 + \sqrt{6}$ et $b = 3 - \sqrt{6}$

calculer $a^2 + b^2$

3- on considère un triangle rectangle ABC BC=a et AC=b, calculer AB

EX6

Soient a, b et c des réels positifs tels que $0 < a < b < c$ et $2b = a + c$

montrer que

$$\frac{2}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

EX7

Soient x et y deux réels tels que: $x + y = 2$ et $x^2 + y^2 = 8$

1- calculer xy

2- calculer $x^6 + y^6$; $x^3 + y^3$ et $x^4 + y^4$

EX8

Soient x et y deux entiers relatifs, tels que:

$$x^2 + 2y + 6 = x(y + 6)$$

1- montrer que:

$$[2x - (y + 6)]^2 = (y + 2)^2 + 8$$

2- Déterminer les valeurs de x et y

EX9

1-Montrer que

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

2- calculer: $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ et

$$B = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243}$$

LES ENSEMBLES: N-Z-Q-R

--	--