1-RAPPEL

1-1-NOMBRE DERIVE-FONCTION DERIVEE

1-1-1-DEFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et x_0 un élément de I

i- on dit que f est dérivable en x_0, s'il existe un réel L tel que : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = L$, le nombre L est appelé le nombre dérivé de f en x_0, et noté $f'(x_0)$

ii-On dit que f est dérivable sur I, si elle est dérivable en tout point de I, la fonction f' est appelé la fonction dérivée de f

1-1-2-PROPRIETE

Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0

1-1-3-PROPRIETE

Soit f une fonction dérivable en x_0, l'équation de la tangente (T) de la courbe (C_f) au point $A(x_0,f(x_0))$ est : $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

1-1-4-EXERCICE

Soit $\begin{cases} f(x) = x^2 - \frac{3}{2}x ; x \geq 1 \\ f(x) = \frac{-1}{2x} ; x \prec 1 \end{cases}$

1- déterminer D_f , étudier les limites aux bornes de D_f

2- étudier la continuité de f au point (1)

3- étudier la dérivabilité de f au point (1), déterminer les demi-tangentes au point (1)

4- étudier les variations de f, tracer (C_f)

1-2- LES OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVEES

1-2-1-PROPRIETE

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I, et k un réel.

i- les fonctions (f+g), (f.g) et (k.f) sont dérivables sur I, et on a : $\left(f+g\right)' = f' + g'$

$\left(f \cdot g\right)' = f'.g + f.g'$ et $\left(k.f\right)' = k.f'$

ii- si $\left(\forall x \in I\right) \quad g(x) \neq 0$, alors f/g et 1/g sont dérivables sur I, et on a : $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$ et

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$

2-DERIVEE DE LA COMPOSEE DE DEUX FONCTIONS

2-1-PROPRIETE

Soient f une fonction définie et dérivable sur I, et g une fonction définie et dérivable sur J, tel que $f(I) \subset J$. la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I, et sa dérivée est

$$\left(g \circ f\right)'(x) = g'(f(x)).f'(x)$$

2-2-RESULTAT

i- si f est dérivable sur I, alors $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ $\left(f^n\right)'(x) = n.f^{n-1}(x)f'(x)$ (composée de g(x)=x^n et de f)

ii- si f est dérivable sur I et $f(x) \succ 0$, alors $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ (composée de $g(x) = \sqrt{x}$ et de f

2-3-EXERCICE

Calculer la dérivée de f dans les cas suivants :

$i - f(x) = \cos(x^2 + 7x - 6)$

$ii - f(x) = \sqrt{x^3 + x - 3}$

$iii - f(x) = \sin\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

$iv - f(x) = \sqrt{\tan(x)}$

3-DERIVEE DE LA FONCTION RECIPROQUE

3-1-PROPRIETE

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert I.

i- si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$, et on a :

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x_0)\right) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

ii- si f est dérivable sur I, et $\left(\forall x \in I\right); f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur f(I) et

$$\left(\forall y \in f(I)\right); \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Démonstration

On a $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ et $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$ donc

$\left(f^{-1} \circ f\right)'(x) = 1 \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right).f'(x) = 1$. on remplace f(x) par y et x par f^{-1}(y).

3-2-RESULTAT

Soit $f(x)=\sqrt[n]{x}$ et n un entier naturel non nul. La fonction est dérivable sur $]0,+\infty[$, et sa dérivée est : $f'(x)=\dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$

Démonstration :

3-3-PROPRIETE

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle ouvert I, et n un entier naturel non nul, alors la fonction $g(x)=\sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I, et sa dérivée est :

$$g'(x)=\frac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$$

3-4-PROPRIETE

Si f est dérivable et strictement positive sur I, alors on a : $\left(\forall r\in\mathbb{Q}\right)$

$$\left(f^{r}\right)'(x)=r.f^{r-1}(x).f'(x)$$

3-5-EXERCICE

1-Calculer la dérivée de $f(x)=\sqrt[3]{\left(3x^{2}-4x\right)^{2}}$

2- Soit $f(x)=\sqrt[3]{x^{2}+x-2}$

a- déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

b- étudier les variations de f

3- Soit $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^{2}-x}$

a- déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

b- calculer la dérivée de f

4-REPRESENTATION GRAPHIQUE

4-1-RAPPEL

4-4-1-ASYMPTOTE PARALLELE A L'AXE DES ORDONNEES

DEFINITION

Si $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, alors on dit que la droite d'équation x=a est une asymptote à la courbe (C_f), et elle est parallèle à l'axe des ordonnées

4-4-2- ASYMPTOTE PARALLELE A L'AXE DES ABSCISSES

DEFINITION

Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=a$, alors on dit que la droite d'équation y=a est une asymptote à la courbe (C_f), et elle est parallèle à l'axe des abscisses

4-4-3-ASYMPTOTE OBLIQUE

DEFINITION

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-\left(ax+b\right)=0$ où $a\neq 0$, alors on dit que la droite y=ax+b est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $\pm\infty$

PROPRIETE

La droite d'équation y=ax+b est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $\pm\infty$ si :

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=a$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=b$

EXERCICE

Soit $f(x)=x+1-\sqrt{x^2-2x}$

1-déterminer D_f , calculer les limites aux bornes de D_f

2-étudier la dérivabilité de f à droite de (2) et à gauche de (0), et donner une interprétation géométrique du résultat

3-étudier les variations de f

4- déterminer l'asymptote oblique de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

5- étudier la position relative de l'asymptote oblique et la courbe (C_f), tracer (C_f)

6- soit g la restriction de f sur $[2,+\infty[$

a- montrer que g admet une fonction réciproque

b- déterminer g^{-1} , tracer $\left(C_{g^{-1}}\right)$

4-2-BRANCHES PARABOLIQUES

4-2-1-DEFINITION

i- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=0$, alors on dit que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $\pm\infty$

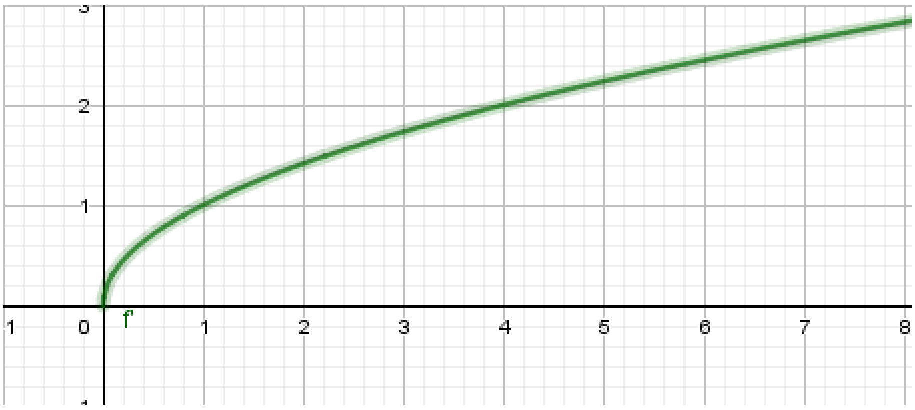
ii- si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=\pm\infty$, alors on dit que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $\pm\infty$

iii- si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=a$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=\pm\infty$, alors on dit que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite y=ax au voisinage de $\pm\infty$

4-2-2-EXEMPLE

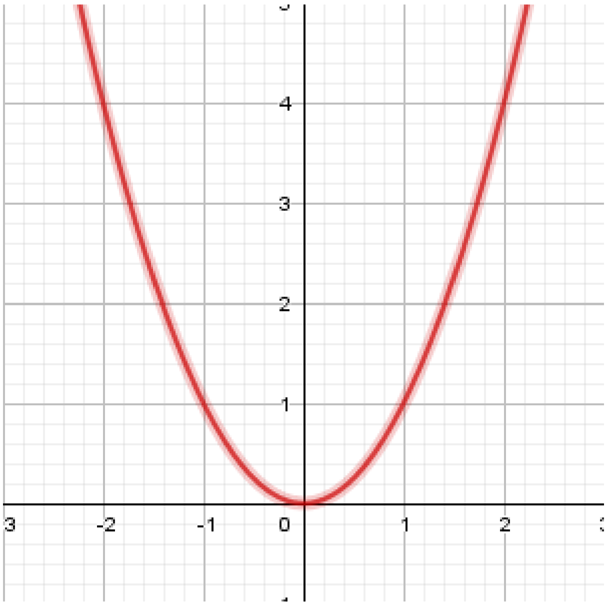
1- $f(x)=\sqrt{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}=0$$



2- $f(x) = x^2$

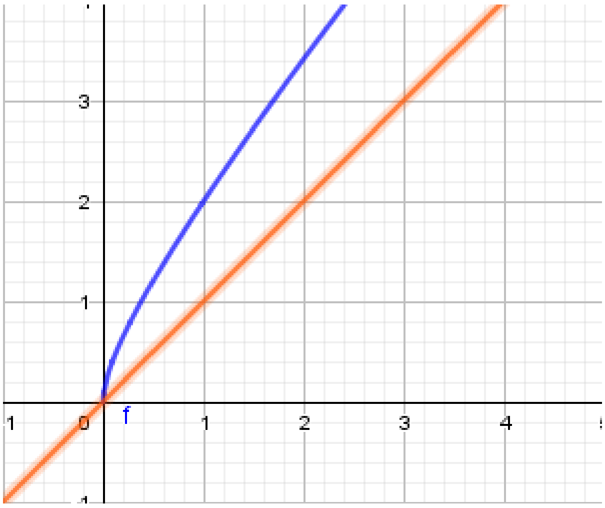
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$



3- $f(x) = x + \sqrt{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$



4-4-3-EXERCICE

Soit $f(x)=\sqrt{x+1}-x+1$

1- déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2- étudier la dérivabilité de f au point (-4), et donner une interprétation géométrique au résultat

3- étudier les variations de f

4- étudier les branches infinies de la courbe (C_f) , tracer (C_f)

5- Soit g une restriction de f sur l'intervalle $[-\frac{15}{5},+\infty[$

a- montrer que g admet une fonction réciproque

b- déterminer g^{-1} , et tracer $(C_{g^{-1}})$

5- LA CONCAVITE DE LA COURBE-POINT D'INFLEXION

5-1-PROPRIETE

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, et x_0 un élément de I

i- si $(\forall x\in I)\quad f''(x)\geq 0$, alors (C_f) est convexe sur I

ii- si $(\forall x\in I)\quad f''(x)\leq 0$, alors (C_f) est concave sur I

iii- si $f''(x_0)=0$ et f'' change de signe au voisinage de x_0 , alors $A(x_0,f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f)

x		x_0	
$f''(x)$	-	0	+
(C_f)		point d'inflexion	

5-2-EXERCICE

Soit $f(x)=|x|\sqrt{x^2-1}$

1-déterminer D_f , et étudier la parité de , calculer la limite de à $+\infty$
2- étudier la dérivabilité de f au point (1), et interpréter géométriquement le résultat
3-étudier les variations de f sur $]1,+\infty[$
4- étudier la concavité de f sur $]1,+\infty[$
5- étudier le point d'intersection de (C_f) et la droite $y=x$ si x est positif
6- étudier les branches infinies, et tracer (C_f)
7- Soit g la restriction de f sur $[1,+\infty[$
a-montrer que g admet une fonction réciproque
b- soit g^{-1} la fonction réciproque de g, calculer $\left(g^{-1}\right)'\left(\sqrt{2}\right)$
c-déterminer $g^{-1}(x)$ et tracer $\left(C_{g^{-1}}\right)$

6-AXE DE SYMETRIE- CENTRE DE SYMETRIE

6-1-PROPRIETE

Soit f une fonction définie sur D, et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

a et b deux réels , on a
i- la droite x=a est un axe de symétrie de la courbe (C_f), si f(2a-x)=f(x)
ii- le point $\Omega\left(a,b\right)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f), si f(2a-x)=2b-f(x)

6-2-EXERCICE

Soit $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{x}$
1- déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f
2- montrer que $\Omega\left(0,1\right)$ est un centre de symétrie de $\left(C_f\right)$
3-étudier les branches infinies
4- étudier la dérivabilité de f aux points (2) et (-2), et interpréter géométriquement le résultat
5- étudier les variations de f
6- tracer (C_f)

EX1

1- Comparer $\sqrt[3]{11} \quad et \quad \sqrt{5}$

2- résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation

$\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$

3- résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{x-4}\geq 2$

4- simplifier le nombre B tel que

$B=\sqrt[3]{3\sqrt{21}+8}-\sqrt[3]{3\sqrt{21}-8}$

5- calculer les limites suivantes:

$i-\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x^2}}}$

$ii-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sin x}$

$iii-\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[3]{x+2}$

EX2

Soit $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

1- déterminer D_f

2- calculer les limites de f aux $\pm\infty$

3-étudier les variations de f

4- déduire que f admet une fonction réciproque définit sur J qu'il faut déterminer

5- résoudre l'équation suivante:

$f^{-1}\left(\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{2}}\right)=x$

EX3

Soit f une fonction définit sur $\mathbb{R}$ par:

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{1-x} & , x<0 \\ f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}} & , x\geq 0 \end{cases}$$

1- montrer que f est continue au point 0

2- calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) \quad , \quad \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

3- calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, et interpréter géométriquement le résultat

4- étudier la dérivabilité de f au point 0, puis interpréter géométriquement le résultat

5-étudier les variations de f

6- soit h la restriction de f sur $I=\mathbb{R}^+$

i- montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définit sur l'intervalle J qu'il faut déterminer, puis calculer $\left(h^{-1}\right)'\left(\dfrac{1}{2}\right)$

ii- déterminer la fonction h^{-1} pour tout x de J

iii- tracer les courbes $\left(C_f\right) \quad et \quad \left(C_{h^{-1}}\right)$ dans un même repère orthonormé

EX4

Soit $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$

1- calculer f(1), puis déduire D_f

2-calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

3- étudier la dérivabilité de f aux points (1) et (-2), puis donner l'interprétation géométrique du résultat

4- calculer

$f'(x) \ pour \ tout \ x\in\left]-2,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

5- donner le tableau de variation de f

6- Soit g la restriction de f sur $\left[1,+\infty\right[$

a- montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définit sur un intervalle J qu'il faut déterminer

b- calculer $\left(g^{-1}\right)'(\sqrt[3]{4})$

7- a-étudier les branches infinies de (C_f)

b- tracer $(C_f) \quad et \quad (C_{g^{-1}})$

EX5

Soit $f(x)=\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)$

1- déterminer D_f

2- calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

3-étudier la dérivabilité de f au point 0, puis déduire l'interprétation géométrique du résultat

4-a- calculer f'(x)

b- donner le tableau de variation de f

5-a- étudier les branches infinies de (C_f)

b- tracer (C_f)