BAC (JUIN 2013)

EXERCICE 1

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les points $A(-1,1,0)$, $B(1,0,1)$ et $\Omega(1,1,-1)$ et la sphère (S) de centre Ω et de $rayon$ 3

1-a- montrer que $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, et déduire que $x+y-z=0$ est l'équation cartésienne du plan (OBC)

b- montrer que: $d\left(\Omega,(OAB)\right)=\sqrt{3}$, puis déduire que le plan (OBC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{6}$

2- Soit (Δ) la droite qui passe par Ω et perpendiculaire au plan (OAB)

a- montrer que $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \qquad (t\in\mathbb{R}) \\ z=-1-t \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ)

b- déterminer le triplet des coordonnées du centre du cercle (Γ)

EXERCICE 2

On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$

Les points A, B et C d'affixes respectivement $a=7+2i$, $b=4+8i$, et $c=-2+5i$

1-a- montrer que $\dfrac{c-a}{b-a}=1+i$

b- déduire que $AC=AB\sqrt{2}$, donner un mesure de l'angle orienté $\overline{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}$

2- soit R la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

a- montrer que l'affixe du point D l'image du point A par la rotation R est $d=10+11i$

b- calculer $\dfrac{d-c}{b-c}$, et déduire que les points B, C et D sont alignés

EXERCICE 3

Une caisse contient 2 boules blanches, 3 boules vertes et 5 boules rouges (indiscernable au toucher)

On tire simultanément 4 boules de la caisse

1- soient l'événement A:"obtenir 2 boules rouges et 2 boules vertes", B:"aucune boules n'est blanches parmi les 4 boules tirées"

Montrer que $P(A)=\dfrac{1}{7}$ et $P(B)=\dfrac{1}{3}$

2- on considère la variable aléatoire X qui fait correspondre tout tirage au nombre de boules blanches tirées

a- vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont: 0, 1, 2

b- montrer que: $P(X=1)=\dfrac{8}{15}$

c- déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

EXERCICE 4

Soit (u_n) une suite définie par: $u_1 = 0 \ et \ \left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad u_{n+1} = \dfrac{25}{10 - u_n}$

1- vérifier que: $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad 5 - u_{n+1} = \dfrac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$,

et montrer par récurrence que: $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad 5 - u_n > 0$

2-on considère la suite numérique (v_n) définie par: $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \qquad v_n = \dfrac{5}{5 - u_n}$

a-montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad v_{n+1} = \dfrac{10 - u_n}{5 - u_n}$, puis vérifier que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad v_{n+1} - v_n = 1$

b- montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad v_n = n$, et déduire que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad u_n = 5 - \dfrac{5}{n}$

c- calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

EXERCICE 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = (x-2)^2 e^x$ et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right) \left(\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1\, cm\right)$

1-a- montrer que: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b- montrer que: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, puis déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$, dont il faut déterminer sa direction

2-a- vérifier que: $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right) \quad f(x) = x^2 e^x - 4xe^x + 4e^x$

b- montrer que: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$,et interpréter géométriquement le résultat (on rappelle que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad \lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$)

3-a- montrer que: $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right) \quad f'(x) = x(x-2)e^x$

b- montrer que f est croissante sur les intervalles $\left]-\infty, 0\right] \ et \ \left[2, +\infty\right[$, et qu'elle est décroissante sur l'intervalle $\left[0, 2\right]$

c- donner le tableau de variation de f

4-a- montrer que: $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right) \quad f''(x) = (x^2 - 2)e^x$, puis déduire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion , déterminer leurs ordonnées n'est pas demandé

b- construire la courbe (C)

5-a- montrer que la fonction $H(x) = (x-1)e^x$ est une primitive de la fonction $h(x) = xe^x$ sur $\mathbb{R}$, puis calculer $\displaystyle\int_0^1 xe^x \, dx$

b- en utilisant l'intégration par partie, montrer que $\int_0^1 x^2 e^x \, dx = e - 2$

c- montrer que l'aire de la surface limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0 \ et \ \ x = 1 \ est \ \ égale \ à \ \ 5(e-2) \ cm^2$

6- utiliser la courbe (C) pour déterminer le nombre de solutions de l'équation
$x \in \mathbb{R} \ , \ \ x^2 = e^{-x} + 4x - 4$

BAC (JUILLET 2013)

EXERCICE 1

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les points $A(0,0,1)$, $B(1,1,1)$ et $C(2,1,2)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1,-1,0)$ $et\ de\ rayon\ \sqrt{3}$

1- montrer que $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S), et vérifier que le point A appartient à (S)

2-a- montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$, et déduire que $x-y-z+1=0$ est l'équation cartésienne du plan (OBC)

b- calculer $d\left(\Omega,(ABC)\right)$, puis déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A

2- Soit (Δ) la droite qui passe par Ω et perpendiculaire au plan (ABC)

a- montrer que $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=-t \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ)

b- déterminer le triplet des coordonnées des points l'intersection de la droite (Δ) et la sphère (S)

EXERCICE 2

1- résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante $z^2-8z+25=0$

2- on considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$

Les points A, B et C d'affixes respectivement $a=4+3i$, $b=4-3i$, et $c=10+3i$

On considère la translation T de vecteur $\overrightarrow{BC}$

a- montrer que l'affixe du point D l'image du point C par la translation T est $d=10+9i$

b- vérifier que $\dfrac{b-a}{d-a}=-\dfrac{1}{2}(1+i)$, puis écrire le nombre complexe $-\dfrac{1}{2}(1+i)$ sous forme trigonométrique

c- montrer que $\overline{\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)}\equiv\dfrac{5\pi}{4}[2\pi]$

EXERCICE 3

Soit (u_n) une suite définie par: $u_0=2\ et\ \left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\ u_{n+1}=\dfrac{1}{5}u_n+\dfrac{4}{5}$

1- vérifier que: $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\quad u_{n+1}-1=\dfrac{1}{5}(u_n-1)$,

2-a- montrer par récurrence que: $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\quad u_n>1$

b- montrer que la suite (u_n) est décroissante

c- déduire que la suite (u_n) est convergente

3-on considère la suite numérique (v_n) définie par: $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\quad v_n=u_n-1$

a- montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{5}$, puis écrire v_n en fonction de n

b- montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\quad u_n=\left(\dfrac{1}{5}\right)^n+1$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE 4

Une caisse contient 4 boules blanches, 3 boules noires et boules vertes (indiscernable au toucher)

On tire simultanément 3 boules de la caisse

1- soient l'événement A:"obtenir 3 boules de mêmes couleurs ", et B:"obtenir 3 boules de couleurs différentes deux à deux "

Montrer que $P(A)=\dfrac{5}{84}\quad et\quad P(B)=\dfrac{2}{7}$

2- on considère la variable aléatoire X qui fait correspondre tout tirage au nombre de boules noires tirées

a- vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont: 0, 1, 2, 3

b- montrer que: $P(X=1)=\dfrac{15}{28}\quad et\quad P(X=2)=\dfrac{3}{14}$

c- déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

EXERCICE 5

$I-$ Soit g une fonction définie sur $I=\left]0,+\infty\right[$ par : $g(x)=x^2-x-\ln x$

1- a vérifier que: $(\forall x\in\mathbb{R})\qquad 2x^2-x-1=(x-1)(2x+1)$

b- montrer que: $\left(\forall x \left]0,+\infty\right[\right)\ g'(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x}$, et déduire que g est décroissante sur $\left]0,1\right]$, et croissante sur $\left[1,+\infty\right[$

2- montrer que: $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)\quad g(x)\geq 0$

$II-$ on considère la fonction f définie sur I par: $f(x)=x^2-1-(\ln x)^2$ et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ $\left(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\,cm\right)$

1-a- montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$, et interpréter géométriquement le résultat

b- montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$, (on a $\dfrac{f(x)}{x}=x\left(1-\dfrac{1}{x^2}-\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2\right)$)

c- déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$, déterminer sa direction

2-a- montrer que $(\forall x\in I)\ \ f'(x)=2\left(\dfrac{x^2-\ln x}{x}\right)$

b- vérifier que $\left(\forall x \in I\right) \quad \frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - \ln x}{x}$, et déduire que f est croissante sur $\left]0, +\infty\right[$

3- a- montrer que $y = 2x - 2$ est l'équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point A(1,0)

b- construire la courbe (C) et la droite (T) (on admet que la courbe (C) admet un point d'inflexion au point A)

4-a- montrer que la fonction $H(x) = x(\ln x - 1)$ est une primitive de la fonction $h(x) = \ln x$ sur $\left]0, +\infty\right[$, puis montrer que $\int_1^e \ln x \; dx = 1$

b- en utilisant l'intégration par partie, montrer que $\int_1^e (\ln x)^2 \; dx = e - 2$

c- montrer que l'aire de la surface limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = e \;\; et \;\; x = 1 \;\; est \;\; égale \;\; à \;\; \frac{1}{3}(e^3 - 6e + 8) \;\; cm^2$