DENOMBREMENT

1- ENSEMBLE FINI

1-1-DEFINITION

Soit E un ensemble fini de n éléments distincts: x_1, x_2,……., x_n. on appelle cardinal de E son nombre d'éléments n, et on écrit: card(E)=n

1-2-EXEMPLE

Soit $E = \quad a,b,c,d,e$; card(E)=5 , $card\varnothing = 0$

1-3- PRODUIT CARTESIEN

a-DEFINITION

Soient E et F deux ensembles non vides. Le produit cartésien de E et F dans cet ordre est l'ensemble des couples (x,y) tel que x un élément de E et y un élément de F, on le note $E\times F$. $E\times F = \quad (x,y)\ /\ x\in E \quad et \qquad y\in F$

b-EXEMPLE

Soient $E = \quad a,b,c \qquad et \qquad F = \quad 1,2$

c-PROPRIETE

Soient E et F deux ensembles finis et non vides. Le produit cartésien $E\times F$ est fini , et on a: $card(E\times F) = card(E)\times card(F)$

2-PRINCIPE GENERALE DE DENOMBREMENT

2-1-DEFINITION

Si une opération globale peut se décomposer en k opérations élémentaires successives, ces derniers pouvant s'effectuer respectivement de n_1, n_2,…….,n_k manières, alors l'opération globale peut se faire de $n_1 \times n_2 \times ...... \times n_k$ manières différentes

2-2-EXEMPLE

- course de chevaux (tiercé)
- écrire un code de 4 chiffres

3- ARRANGEMENT

3-1-DEFINITION

Soit E un ensemble fini de cardinal n, et soit p un entier naturel tel que $p\leq n$. Tout élément du produit scalaire E^p où $x_1, x_2, ..., x_p$ sont des éléments de E distincts deux à deux, est appelé arrangement de p éléments de E

3-2-EXEMPLE

Soit $E = \quad a,b,c,d$, déterminons tous les arrangements de deux éléments

3-3-PROPRIETE

Soit E un ensemble fini de cardinal n, et soit p un entier naturel tel que $p\leq n$. Le nombre des arrangements de p éléments de E est le nombre : n(n-1)(n-2)….(n-p+1), on le note $A_n^p = n(n-1).....(n-p+1)$

3-4- EXEMPLE

Calculons $A_4^2 \qquad A_7^3 \qquad A_9^4$

3-5-EXERCICE

1- calculer $A_8^4 \qquad A_{11}^5$

2- calculer $A_n^1 \qquad A_n^2$

3- résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $A_{n+2}^2 = 30$

4- écrire un code de 3 chiffres parmi les chiffres suivants: 1,2,3,4,5,6,7,8,9

4- PERMUTATIONS

4-1-DEFINITION

Soit E un ensemble fini de cardinal n, tout arrangement de tous les éléments de E est appelé permutation des éléments de E, ou permutation de n éléments. Le nombre des permutations est $A_n^n = n! = n(n-1).....2.1$, on lit « factoriel n »

4-2-EXEMPLE

Soit $E = \{a,b,c\}$, déterminons toutes les permutations des éléments de E : (a,b,c) ; (a,c,b)

Le nombre des permutations des éléments de E est : 3 !=3x2=6

4-3-EXERCICE

Avec 5 personnes et 5 chaises, combien y-a-t-il de façons de s'assoir sur une chaise

4-4-PROPRIETE

On admet que $0! = 1$, on a pour tout entier naturel n et p tel que $p \leq n$, on a

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

4-5-EXERCICE

1- calculer $\frac{7!}{4!}$ $\frac{3!}{9!}$ $\frac{8! \times 5!}{10! \times 4!}$

2- soit n un entier naturel, calculer en fonction de n : $\frac{(n+2)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!}$

5- COMBINAISONS

5-1-DEFINITION

Soit E un ensemble fini de cardinal n, et soit p un entier naturel tel que $p \leq n$. Toute partie de E contenant p éléments est appelée combinaison de p éléments de E

5-2-EXEMPLE

Soit E={a,b,c,d} ; déterminons toutes les parties de E contenant 2 éléments :{a,b} ; {a,c}……..

5-3-PROPRIETE

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n éléments d'un ensemble E est le nombre qu'on note C_n^p tel que $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Exemple

$$C_4^2 = \frac{A_4^2}{2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

5-4-EXERCICE

1- on veut sélectionner 3 élèves parmi 20 élèves pour représenter une école pour participer à un concours. Combien y-t-il de possibilité pour choisir ces 3 élèves

2-calculer C_7^4 $, C_6^6$ $, C_8^3 + C_8^5$

3- résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation suivante : $2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$

6- FORMULE BINOMIALE(FORMULE DE NEWTON)

6-1-PROPRIETE

Soit a et b deux réels et n un entier naturel non nul , on a : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p \times a^{n-p} \times b^p$

Démonstration par récurrence

6-2PROPRIETE

Soit E un ensemble fini de cardinal n. $P(E)$ l'ensemble de tous les parties de E, on $card\ P(E)\ = 2^n$

Exemple

1-Soit E={a,b,c} , on a : $P(E) = \ \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, E$

2- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = (1+1)^n$

7-TIRAGES

7-1-DEFINITION

Dans une urne, il y a n boules, on veut tirer p boules avec $1 \leq p \leq n$
il existe trois façons de tirer les p boules de l'urne
i-tirage successif avec remise : on tire une première boule, on la note, et on la remet dans l'urne, puis on tire une deuxième boule, on la note, et la remet dans l'urne et ainsi de suite le résultat de ce tirage est le nombre d'application : n^p
ii-tirage successif sans remise : on tire une première boule, on la note, et on la garde, et ainsi de suite. Le résultat de ce tirage est le nombre d'arrangement : A_n^p
iii-tirage simultanément : on tire p boules en même temps. Le résultat de tirage est le nombre de combinaison : C_n^p

7-2-EXERCICE

Un sac contient 12 boules : 5 boules rouges, 4 boules vertes et 3 boules blanches. On tire simultanément 3 boules du sac
a-déterminer le nombre de tirage possible
b- déterminer le nombre de tirage possible de 3 boules rouges
c- déterminer le nombre de tirage possible de 3 boules vertes
d- déterminer le nombre de tirage possible de 3 boules de même couleur
e- déterminer le nombre de tirage possible de 3 boules de 3 couleurs différentes
f- déterminer le nombre de tirage possible de 3 boules : 2 boules rouges et une boule blanche
g- déterminer le nombre de tirage possible d'au moins une boule rouge
2-on tire successivement et sans remise 3 boules du sac : mêmes questions