1-L'EQUATION DIFFERENTIELLE : y'=ay+b

1-1-DEFINITION

Soient a et b deux réels.
i- l'équation $y' = ay + b$ tel que l'inconnue est y et y' sa dérivée, est appelée équation différentielle de premier ordre
ii- toute fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et qui vérifie l'équation : $f'(x) = af(x) + b$ est une solution de l'équation différentielle : $y' = ay + b$

1-2-PROPRIETE

Soit a un réel, les solutions de l'équation différentielle : $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = ke^{ax}$ où $k \in \mathbb{R}$

1-3-PROPRIETE

Soient a et b deux réels .les solutions de l'équation différentielle : $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où $k \in \mathbb{R}$

1-4-PROPRIETE

Soient a et b deux réels , tel que $a \neq 0$ .Pour tout x_0 et y_0 de $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y' = ay + b$ admet une seul solution qui vérifie les conditions $f(x_0) = y_0$

1-5-EXEMPLE

Soit l'équation différentielle : $y' = 4y + 5$ déterminons f telle que $f(0) = 2$

1-6-EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

$y' - 3y = 0$, $2y' + y = -3$, $y' = 2$, $\dfrac{3}{4}y + \dfrac{2}{3}y' = 1$

2-L'EQUATION DIFFERENTIELLE : y''+ay'+by=0

2-1-DEFINITION

Soient a et b deux réels tel que $a \neq 0$.
i-l'équation $y'' + ay' + by = 0$ où la fonction y est l'inconnue tel que y' sa dérivée première et y'' sa dérivée seconde, est appelée équation différentielle de second ordre
ii- toute fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et qui vérifie l'équation : $\forall x \in \mathbb{R}$
$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$ est appelée solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$

2-2-DEFINITION

Soient a et b deux réels, l'équation : $r^2 + ar + b = 0$ où r est l'inconnue, est appelée l'équation caractéristique de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$

2-3-PROPRIETE

Soit l'équation différentielle :(E) $y'' + ay' + by = 0$, et son équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$, et $\Delta = a^2 - 4b$

i- si $\Delta > 0$, l'équation $r^2 + ar + b = 0$ admet deux solutions différentes r_1 et r_2 , alors les solutions de l'équation (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$,où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$

ii- si $\Delta = 0$, l'équation $r^2 + ar + b = 0$ admet une solution double r_0, alors les solutions de l'équation (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \alpha x + \beta \ e^{r_0 x}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$

iii- si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes $r_1 = p + iq \quad et \quad r_2 = p - iq$
alors les solutions de l'équation (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = e^{px} \quad \alpha \cdot cox(qx) + \beta \cdot \sin(qx)$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$

<u>2-4-EXERCICE</u>

1-Résoudre les équations différentielles suivantes :
$y'' - 3y = 0$, $y'' + 4y' = 0$, $y'' + 3y' - 4y = 0$, $y'' + 4y' + 4y = 0$
$y'' + y' + y = 0$

2- a-résoudre l'équation différentielle : $y'' - 6y' + 8y = 0$

b-déterminer la solution qui vérifie les conditions suivantes :
$y(0) = 1$, $y'(0) = 3$