1-L'ENSEMBLE $\mathbb{C}$

1-1-DEFINITION

on définit l'ensemble $\mathbb{C}$ par :
i-muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$
ii- contenant un nombre i tel que $i^2 = -1$
iii- tel que chaque élément z de $\mathbb{C}$ appelé nombre complexe, peut s'écrire de manière unique sous forme de : $z = a + ib$, avec a et b des nombres réels
$\mathbb{C} = \left\{x + iy \,/\, (x,y) \in \mathbb{R}\right\}$

1-2-L'ECRITURE ALGEBRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1-2-1-DEFINITION

Tout nombre complexe z s'écrit d'une façon unique sous forme de $z = x + iy$, avec x et y des nombres réels.
i- l'écriture z=x+iy s'appelle la forme algébrique du nombre z
ii- le nombre x s'appelle la partie réelle du nombre z, on la note par Re(z)
iii- le nombre y s'appelle la partie imaginaire du nombre z, on la note par Im(z)
iv-tout nombre complexe de la forme z=iy, avec y un réel, est appelé imaginaire pur, $\left(z \in i\mathbb{R}\right)$

1-2-2-PROPRIETE

Soient z et z' deux complexes.
i- z est un réel si et seulement si Im(z)=0
ii- z est un imaginaire pur si et seulement si Re(z)=0
iii- $z=z'$ si et seulement si $Re(z)=Re(z')$ et $Im(z)=Im(z')$

1-3-OPERATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

1-3-1-PROPRIETE

Soient z et z' deux nombres complexes tels que : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, $k \in \mathbb{R}$, on a
i- $z + z' = (x + x') + i(y + y')$
ii- $z \times z' = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$
iii- $kz = (kx) + i(ky)$

1-3-2-EXERCICE

1-Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :
$a = (1+2i)^2 ; b = (1+3i)(7-4i) ; c = 2i(1+3i)^2 ; d = (1+i)^4$
2-déterminer les réels x et y tels que : $4x + y + i(x - 2y) = 5 - i$
3-soit x un réel, posons : $z = x + 3 + i(x^2 - 4x)$
i- déterminer x pour que z soit réel
ii- déterminer x pour que z soit imaginaire pur
iii- déterminer x pour que $z = 4 - 3i$

1-4-CONJUGUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1-4-1-DEFINITION

Soit z=x+iy un nombre complexe tels que x et y des réels. Le nombre x-iy s'appelle le conjugué de z, et on le note $\overline{z} = x - iy$

1-4-2-PROPRIETE 1

Soit z=x+iy un nombre complexe tel que x et y des réels.

i- $z\overline{z} = x^2 + y^2$

ii- $\overline{\overline{z}} = z$

iii- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

iv- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$

v- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$

1-4-3-PROPRIETE 2

Soient z et z' deux nombres complexes, et n un entier naturel, on a :

i- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

ii- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ et $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$

iii- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$

1-4-5-EXERCICE

1-Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$a = \frac{2}{1-i}\,;b = \frac{4-i}{3+5i}\,;c = \frac{(1-2i)^2}{(3+i)^2}$$

2- posons $z = (1-i)(5+2i)$

Déterminer de deux façons différentes le conjugué de z

3- résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes

$$2iz + 3 = z - i \quad ; \quad \frac{iz+3}{z-1} = -4i$$

1-5-MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1-5-1-DEFINITION

Soit z=x+iy un nombre complexe tel que x et y des réels. Le nombre $\sqrt{z\overline{z}}$ est appelé le module de z, et on le note $\left|z\right| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

1-5-2-PROPRIETE

Soient z et z' deux nombres complexes, et n un entier relatif, on a

i- $\left(\forall z \in \mathbb{C}\right)$ $\left|z\right|^2 = z\overline{z}$ et $\left|z\right| = \left|-z\right| = \left|\overline{z}\right|$

ii- $\left|z\right| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

iii- $\forall\left(z, z'\right) \in \mathbb{C}^2$ $\left|z \times z'\right| = \left|z\right| \times \left|z'\right|$ et $\left|z^n\right| = \left|z\right|^n$

iv- $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2 \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

v- $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2 \quad |z+z'| \le |z| + |z'|$

1-5-3-EXERCICE

1-calculer le module de z dans les cas suivants

$$z = 3-2i \ ; \ z = (2-i)(4-3i) \ ; \ z = \frac{3-\sqrt{5}i}{5+3i} \ ; \ z = (2-i)^3$$

2-REPRESENTATION GEOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

2-1-DEFINITION

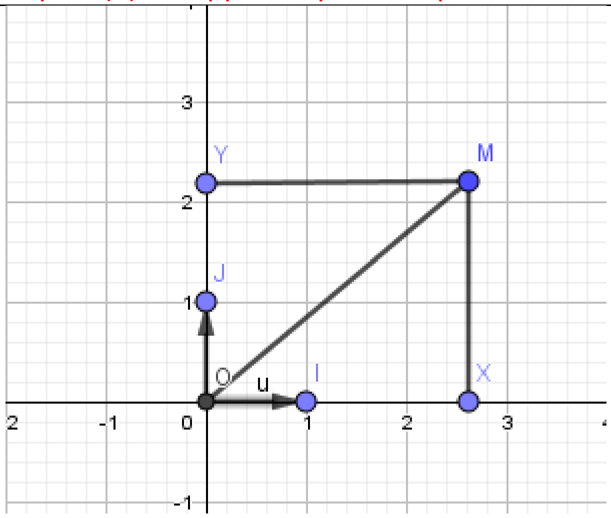
Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

i- à tout nombre complexe $z = x + iy$, on lui fait correspondre un point $M(x,y)$, on dit que M est l'image du nombre complexe z, et on écrit M(z)

ii- on dit que $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image du nombre complexe z, et on écrit $\overrightarrow{OM}(z)$

iii- on dit que z est l'affixe du point M, et on écrit z_M

Le plan (P) est appelé le plan complexe



2-2-PROPRIETE

i-Si A et B deux points du plan complexe (P) d'affixes respectivement z_A, z_B , alors l'affixe de I, milieu de [AB] est : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

ii- Soient A,B et C trois points du plan complexe (P), tels que $A \neq B$, d'affixes respectivement z_A, z_B, z_C . les points A,B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

iii- Soient A et B deux points du plan complexe (P), d'affixes respectivement z_A, z_B , on a :

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left|z_B - z_A\right|$$

2-3-EXERCICE

EXERCICE 1

Soient A et B deux points dont les affixes respectivement sont : $z_A = 2 - i$ et $z_B = 3 + 4i$

1- calculer z_I l'affixe de I milieu de $[AB]$

2- déterminer l'affixe du point C tel que le quadrilatère OABC est un parallélogramme

EXERCICE 2

Soit z un nombre complexe, on pose $U = \dfrac{1+3i}{z}$

1-on pose $z = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, déterminer Re(U) et Im(U) en fonction de x et y

2-déterminer l'ensemble des points M(z) tel que U est un imaginaire pur

EXERCICE 3

Soit z un nombre complexe différent de 1, on pose $U = \dfrac{z-2i}{z-1}$

1- on pose z=x+iy, déterminer Re(z) et Im(z) en fonction de x et y

2-déterminer l'ensemble des points M(z) tel que U est un réel

3- déterminer l'ensemble des points M(z) tel que U est un imaginaire pur

EXERCICE 4

On considère dans le plan complexe les points A,B et C d'affixes respectivement , a=-1+i ; b=2i ; c=2-2i

1- calculer $\left|a-b\right|;\left|a-c\right|;\left|c-b\right|$

2- déterminer la nature du triangle ABC

EXERCICE 5

On considère dans le plan complexe les points B et C d'affixes respectivement

$z_B = 2 + 2i\sqrt{3}$; $z_C = 2 - 2i\sqrt{3}$

1- vérifier que le point B appartient au cercle (C) de centre O et rayon 4

2- on considère le point A d'affixe $z_A = \dfrac{z_C - z_B}{2}$, calculer $z_A; \left|z_B - z_A\right|; \left|z_C - z_B\right|; \left|z_C - z_A\right|$

3- déterminer la nature du triangle ABC

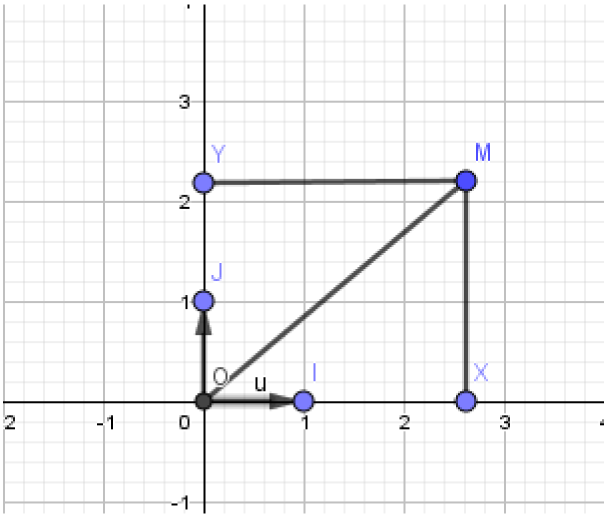
3-ARGUMENT ET FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN COMPLEXE

3-1-ARGUMENT D'UN COMPLEXE

3-1-1-DEFINITION

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe (P). on appelle argument du nombre complexe z une des mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$, et on le note par arg(z), et on écrit : $\arg(z) \equiv \overline{(\vec{u}, \overrightarrow{OM})}[2\pi]$

$$\begin{cases} OM = |z| \\ \overline{(\vec{u}, \overrightarrow{OM})} \equiv \arg(z)[2\pi] \end{cases}$$



3-1-2-EXEMPLE

1- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = x$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) \equiv 0[2\pi]$ $\Rightarrow \arg(z) \equiv 0[2\pi]$

2- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = iy$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ $\Rightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

3-1-3-PROPRIETE

Soit z un nombre complexe non nul, on a :

i- $\arg\left(\overline{z}\right) \equiv -\arg\left(z\right)[2\pi]$

ii- $\arg\left(-z\right) \equiv \arg\left(z\right)[2\pi]$

iii- $\arg\left(-\overline{z}\right) \equiv \pi - \arg\left(z\right)[2\pi]$

3-2-FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN COMPLEXE

3-2-1-DEFINITION

Soit z un nombre complexe non nul, l'écriture : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, tel que $|z| = r$ et $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$ est appelée forme trigonométrique du nombre complexe z, on note $z = [r, \theta]$

3-2-2-EXEMPLE

Soit z=1+i, on $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ et $z = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

donc on $z = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$

3-2-3-PROPRIETE

i-Soit z un nombre complexe, si $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ et $r > 0$, alors $\left|z\right| = r$ et $\arg\left(z\right) \equiv \theta\left[2\pi\right]$

ii- Soient z et z' deux nombre complexes, on a : $z = z' \Leftrightarrow \left|z\right| = \left|z'\right|$ et $\arg\left(z\right) \equiv \arg\left(z'\right)\left[2\pi\right]$

3-3-RELATION ENTRE FORME ALGEBRIQUE ET TRIGONOMETRIQUE

3-3-1-PROPRIETE

Soit $z = x + iy$ et $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$, alors on a : $\cos\theta = \frac{x}{r}$; $\sin\theta = \frac{y}{r}$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

3-3-2-EXERCICE

Soient $z = 2(-1+i)$ et $z' = -2 + 2i\sqrt{3}$

Ecrire sous forme trigonométrique les nombres z et z'

3-4-OPERATIONS SUR LES ARGUMENT D'UN COMPLEXE

3-4-1-PROPRIETE

Soient z et z' deux nombres complexes non nul, on a :

i- $\arg\left(z \times z'\right) \equiv \arg\left(z\right) + \arg\left(z'\right)\left[2\pi\right]$

ii- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg\left(z\right)\left[2\pi\right]$

iii- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg\left(z\right) - \arg\left(z'\right)\left[2\pi\right]$

iv- $\arg\left(z^n\right) \equiv n\arg\left(z\right)\left[2\pi\right]$

Démonstration

i- $z \times z' = \left[r, \theta\right] \times \left[r', \theta'\right] = \left[r \times r', \theta + \theta'\right]$

ii- $\frac{z}{z'} = \frac{\left[r, \theta\right]}{\left[r', \theta'\right]} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$

iii- $z^n = \left[r, \theta\right]^n = \left[r^n, n\theta\right]$

3-4-2-EXERCICE

1-Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants

$z = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$; $z = (1-i)^3$; $z = (2\sqrt{3} - 2i)^4$

2-soient $z = 1 + i$ et $z' = \sqrt{3} - i$

a- écrire z et z' sous forme trigonométrique

b- écrire $z \times z'$ sous forme trigonométrique et algébrique

c- déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

3-5-ANGLE DE DEUX VECTEURS

3-5-1-PROPRIETE

Soient A,B,C et D quatre points du plan complexe (P), d'affixes respectivement z_A , z_B , z_C et z_D

i- $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg\left(z_B - z_A\right)\left[2\pi\right]$

ii- $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\left[2\pi\right]$

iii- $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\left[2\pi\right]$

3-5-2-PROPRIETE

Soient A,B,C et D quatre points du plan complexe (P), d'affixes respectivement z_A , z_B , z_C et z_D

i- les points A,B et c sont alignés si et seulement si, on a : $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv 0\left[2\pi\right]$ ou

$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \pi\left[2\pi\right]$

ii- les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si , on a : $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0\left[2\pi\right]$ ou

$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \pi\left[2\pi\right]$

iii- les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si, on a :

$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$

3-5-3EXERCICE

EXERCICE 1

Soient A,B et C trois points d'affixes respectivement $a = 2 + 2i\sqrt{3}$; $b = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c = -1 + i\sqrt{3}$

a- déterminer l'argument de $\frac{b - c}{a - c}$

b- déduire que $\left(AC\right) \perp \left(BC\right)$

EXERCICE 2

Soient les points A,B et C d'affixe respectivement $z_A = 2 - 2i\sqrt{3}$; $z_B = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $z_C = 8$

a- écrire z_A , z_B et z_C sous forme trigonométrique

b- représenter A,B et C dans le plan complexe

c- on pose : $Z = \dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$

i-déterminer $\left|Z\right|$ et arg(Z)

ii- déduire la nature du triangle ABC

EXERCICE3

soit z un nombre complexe différent de (-1), et M(z) sont image dans le plan complexe , on pose $U = \dfrac{z+2i}{z+1}$

a- on pose $z = x + iy$ tels que $\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2$

i- calculer Re(U) et Im(U) en fonction de x et y

ii- déterminer l'ensemble des points M(z) tels que U est un réel

iii- déterminer l'ensemble des points M(z) tels que U est un imaginaire pur

b- on considère les points A(2i) et B(-1), déterminer géométriquement (Δ) , l'ensemble des points M(z) tel que $\left|U\right| = 1$

EXERCICE 4

1- déterminer la forme algébrique du nombre complexe z tel que $z = \left(\dfrac{2-3i}{1+2i}\right)^2$

2-déterminer la forme algébrique du nombre complexe z tel que: $\left|z\right|^2 - z = 6 - 2i$

3-soient A et B deux point du plan complexe (P), d'affixe respectivement $z_A = 1 + i \ \ et \ \ z_B = 4 - 3i$, déterminer l'ensemble des points M(z) qui vérifient $\left|z - z_A\right| = \left|z - z_B\right|$

4- on considère dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les points A, B et C d'affixes respectivement $a = 3 + 5i$, $b = 3 - 5i \ \ et \ \ c = 7 + 3i$

i- montrer que $\dfrac{b-c}{a-c} = 2i$

ii- déduire que ABC est un triangle rectangle et que BC=2AC