1-BASE ET REPERE DE L'ESPACE

1-1-DEFINITION

Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ trois vecteurs non nuls, et O un point de l'espace

i- on dit que le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'espace si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires

ii- on dit que $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'espace

1-2-COORDONNEES D'UN POINT- D'UN VECTEUR

PROPRIETE

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère dans l'espace. Pour tout point M, il existe un triplet de réel unique (x, y, z) tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. x est appelé l'abscisse, y l'ordonnée, z la cote du point M et on le note M(x,y,z). les nombres x, y, z sont appelés les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on note $\overrightarrow{OM}(x, y, z)$

1-3-COORDONNES D'UN VECTEUR $\overrightarrow{AB}$

PROPRIETE

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace, on a: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$

1-4-EGALITE DE DEUX VECTEURS

PROPRIETE

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs de l'espace, on a: $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x = x' \quad y = y' \quad z = z'$

1-5-MILIEU D'UN SEGMENT

PROPRIETE

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ dans l'espace. Si I est le milieu de $[AB]$, alors $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

1-6-COLINEARITE DES VECTEURS

1-6-1-PROPRIETE

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace, et $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$ deux vecteurs non nuls

i- les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si: $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$ et

$$\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$$

ii- si $a, b,$ et c sont non nuls alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$

1-6-2-REMARQUE

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$ ou $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$ ou $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$

1-6-3-EXERCICE

Soient $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{w} = (m^2 - 1)\vec{i} + 2m\vec{j} + 2(m^2 - m - 1)\vec{k}$

1- étudier la colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

2- déterminer m pour que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires

2-COPLANARITE DE TROIS VECTEURS

2-1- DETERMINANTS DE TROIS VECTEURS

2-1-1-DEFINITION

Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace, et $\vec{u}(a, b, c)$, $\vec{v}(a', b', c')$ et $\vec{w}(a'', b'', c'')$ trois vecteurs de l'espace. Le déterminant des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est le nombre, qu'on

ETUDE ANALYTIQUE DE L'ESPACE

$$\text{note } \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ définit par: } \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$$

2-1-2-EXERCICE

Soient $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{w} = 5\vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{x} = (m-1)\vec{i} + 2m\vec{j} + 3\vec{k}$

1-calculer $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

2- déterminer m pour que $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) = 0$

2-2-COPLANARITE DE TROIS VECTEURS

2-2-1-PROPRIETE

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace, soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace

1-les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

2- les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$

2-2-2-EXERCICE

l'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considérons les points $A(-3, 2, 0)$, $B(1, -1, 2)$, $C(4, -3, 5)$, $D(-1, 1, 1)$ et $E(2m-1, m+1, 3)$

1- calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$

2- est ce que les points A, B, C et D sont coplanaires

3- déterminer m pour que A, B, C et E soient coplanaires

3-REPRESENTATION PARAMETRIQUE D'UNE DROITE

3-1-DEFINITION

l'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et

$\vec{u}(a, b, c)$ un vecteur non nul. Le système:
$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$
 est appelé représentation

paramétrique de la droite (D) qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{u}$

3-2-EXERCICE

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(1,-2,1), B(0,1,-1) et

C(2,0,3)

1-déterminer la représentation paramétrique de la droite (AB)

2- est ce que C est un point de (AB)

3-3-DEUX EQUATIONS CARTESIENNES DE LA DROITE

3-3-1-PROPRIETE

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, (D) une droite qui passe par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$

i- si $abc \neq 0$ alors le système $\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}$ est appelé équation cartésienne de la droite (D)

ii- si $c=0$ et $ab \neq 0$ alors le système $\begin{cases} \frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} \\ z - z_A = 0 \end{cases}$ est appelé équation cartésienne de

la droite (D)

3-3-2-EXERCICE

Soit (D) une droite définie par l'équation cartésienne: $\frac{2x - 1}{3} = \frac{y + 1}{4} = \frac{3 - 4z}{4}$

1-déterminer le vecteur directeur de (D)

2- déterminer la représentation paramétrique de la droite (D)

4- LE PLAN DANS L'ESPACE

4-1-REPRESENTATION PARAMETRIQUE DU PLAN

4-1-1-DEFINITION

l'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace,

$\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Le système

$\begin{cases} x = x_A + \alpha a + \beta a' \\ y = y_A + \alpha b + \beta b' \\ z = z_A + \alpha c + \beta c' \end{cases}$ est appelé la représentation paramétrique du plan (P) qui passe par

le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on écrit $(P) = P(A, \vec{u}, \vec{v})$, le triplet $(A, \vec{u}, \vec{v})$

est le repère du plan (P)

4-1-2-EXERCICE

soient A(-1,1,1), B(0,2,-1) et C(-1,0,3) trois points de l'espace (P) muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1-montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés

2-déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC)

3- le point D(2,-2,3) appartient-il au plan (ABC)

4-2-EQUATION CARTESIENNE DU PLAN

4-2-1-DEFINITION

l'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit (P) le plan qui passe par $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$. l'équation cartésienne du plan (P) s'écrit sous forme de : $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

Démonstration

4-2-1-EXERCICE

Soient $A(1, -1, 1)$, $B(2, 0, -1)$ et $C(-1, 0, 3)$ trois points de l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

- 1- montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés
- 2- déterminer l'équation cartésienne du plan (ABC)
- 3- le point $E(3, 1, -1)$ appartient-il au plan (ABC)
- 4- déterminer m pour que le point $E(m-1, -2, 5)$ appartienne au plan (ABC)

5-LES POSITIONS RELATIVES DES DROITES ET DES PLANS

5-1- POSITIONS RELATIVES DE DEUX DROITES

5-1-1-PROPRIETE

l'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient (D) une droite qui passe par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et (D') une droite qui passe par B et de vecteur directeur $\vec{v}$

- 1- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $(A \in (D') \text{ ou } B \in (D))$ alors $(D) = (D')$
- 2- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $(A \notin (D') \text{ ou } B \notin (D))$ alors $(D) // (D')$
- 3- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, (D) et (D') sont coplanaires alors (D) et (D') se coupent en un point
- 4- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, et $(D) \cap (D') = \emptyset$ alors (D) et (D') ne sont pas coplanaires

5-1-2-EXERCICE

étudier les positions relatives des droites (D) et (D') dans les cas suivants

$$(D) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad \text{et} \quad (D') : \begin{cases} x = 1 + 3t' \\ y = 2 - t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$$

5-2-POSITION RELATIVE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

5-2-1-PROPRIETE

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient (D) une droite qui passe par $A(x_A, y_A, z_A)$

et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et le plan (P) d'équation cartésienne:

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$1- (D) // (P) \Leftrightarrow a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

$$2- (D) \cap (P) = \{C\} \Leftrightarrow a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$$

Démonstration

5-2-2-EXERCICE

étudier les positions relatives de la droite (D) et le plan (P)

$$(D) : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 4t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad \text{et } (P) : -2x + y + 2z + 1 = 0$$

5-3-POSITION RELATIVE DE DEUX PLANS

5-3-1-PROPRIETE

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient (P) et (P') deux plans définis par:

$$(P): ax+by+cz+d=0 \quad \text{et } (P'): a'x+b'y+c'z+d'=0$$

$$1- (P) // (P') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

$$2- (P) \cap (P') \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \neq 0$$

Dans ce cas (P) et (P') se coupent selon une droite

5-3-2-REMARQUE

si a, b et c sont tous non nuls alors on a:

$$1- (P) // (P') \Leftrightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

$$2- (P) \text{ et } (P') \text{ se coupent selon un droite si } \frac{a'}{a} \neq \frac{b'}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{a'}{a} \neq \frac{b'}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{b'}{b} \neq \frac{c'}{c}$$

5-3-2-EXERCICE

étudier les positions relatives de (P) et (P')

$$(P): x-2y+z-1=0 \quad \text{et } (P'): 3x-y+2z+4=0$$