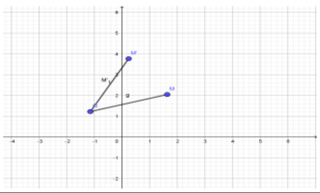
1-GENERALITE

1-1-DEFINITION

Soit Ω un point et α un réel. On appelle rotation de centre Ω et d'angle α, l'application qui a un point M, on associe un point M', tel que OM=OM' et $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \alpha\left[2\pi\right]$, on la note par $r\left(\Omega,\alpha\right)$. le point M' est l'image du point M par la rotation r et on écrit r(M)=M'



1-2-EXEMPLE

1- la rotation $r\left(\Omega,0\right)=id_P$ est l'application identité, r(M)=M

2- la rotation $r\left(\Omega,\pi\right)=S_\Omega$ est la symétrie centrale de centre Ω

3- si $\alpha\neq 0$, la rotation $r\left(\Omega,\alpha\right)$ a pour seul point invariant , le point Ω , $r\left(\Omega\right)=\Omega$

1-3-PROPRIETE

1-Soient M et N deux points, M' et N' leurs images respectives par la rotation $r\left(\Omega,\alpha\right)$, on a :

$M'N'=MN$ et $\overline{\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}\right)} \equiv \alpha\left[2\pi\right]$, la rotation conserve la distance

2- soient A, B, C et D quatre points , A', B', C' et D' leurs images respectives par la rotation $r\left(\Omega,\alpha\right)$. si $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{C'D'}$, la rotation conserve la colinéarité des vecteurs

3- Soient A,B,C et G quatre points, A',B',C',G' leurs images respectives par la rotation $r\left(\Omega,\alpha\right)$ .Si G est le barycentre de , alors G' est le barycentre de $\left(A',a\right);\left(B',b\right);\left(C',c\right)$

4-Soient A,B et C trois points, A',B',C' leurs images respectives par la rotation $r\left(\Omega,\alpha\right)$,

on a $\overline{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)} \equiv \overline{\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)}\left[2\pi\right]$

1-4-EXERCICE

<u>EX1 :</u> Soit OAB un triangle isocèle de sommet O, ABCD est un parallélogramme. On considère la rotation r de centre O et qui transforme A en B, et soit E l'image de D par r

1-montrer que BEC est un triangle isocèle de sommet B

2- montrer que $\overline{\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}\right)} \equiv \overline{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)}\left[2\pi\right]$

<u>EX2 :</u> Soit ABCD un carré de centre O, et soient I et J deux points tels que : $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{BJ}$

et $\overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{AI}$ .soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1- déterminer l'image de A par r

2- en déduire que le triangle OIJ est isocèle et rectangle

<u>EX3 :</u> Soit ABC un triangle équilatérale de centre O, tel que : $\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}} \equiv \frac{\pi}{3}\left[2\pi\right]$. soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

1- montrer que r(A)=B et r(B)=C

2-déterminer l'image du segment [AB] par la rotation r

3- soit $M \in [AB]$ et $P \in [BC]$, tels que BP=AM

a- montrer que r(M)=P et déduire que OP=OM

b-déduire la mesure de l'angle $\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OP}}$

c- calculer la distance MP en fonction de OM

d- déterminer la position de M sur [AB] pour que la distance MP soit minimale

<u>2-ROTATION RECIPROQUE</u>

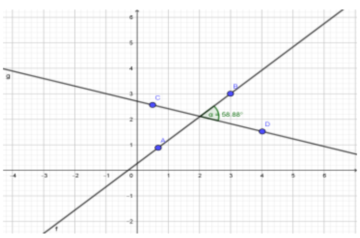
<u>2-1-DEFINITION</u>

Toute rotation $r\ \Omega,\alpha$ de (P) vers (P) est une application bijective, et son application réciproque est une rotation de centre Ω et d'angle $-\alpha$: $r^{-1}\ \Omega,\alpha = r\ \Omega,-\alpha$

<u>2-2-COMPOSEE DE DEUX SYMETRIE AXIALE</u>

<u>THEOREME</u>

Soient $\Delta\ et\ \Delta'$ deux droites qui se coupent au point I, la composée de symétrie $S_{(\Delta)}$ et $S_{(\Delta')}$ est une rotation de centre I et d'angle $\alpha \equiv \overline{\vec{u},\overrightarrow{u'}}\left[2\pi\right]$ où $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont les vecteurs directeurs respectifs des droites $\Delta\ et\ \Delta'$



3-COMPOSEE DE DEUX ROTATIONS

3-1-THEOREME

Soient $r_1 \ \ \Omega_1, \alpha_1$ et $r_2 \ \ \Omega_2, \alpha_2$ deux rotations

i- si $\Omega_1 = \Omega_2$ alors $r_1 \circ r_2$ est une rotation de centre Ω_1 et d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$

ii- si $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ alors $r_1 \circ r_2$ est une rotation d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$ et de centre l'intersection de deux droites $\Delta_1 \ \ et \ \ \Delta_2$ telles que Δ_1 passe par Ω_1 et

$\Omega_1\Omega_2 \ \ , \Delta_1 \ = \dfrac{\alpha_1}{2}$ et Δ_2 passe par Ω_2 et $\Omega_1\Omega_2 \ \ , \Delta_2 \ = \dfrac{-\alpha_2}{2}$

iii- si $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\alpha_1 + \alpha_2 = 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ alors $r_1 \circ r_2$ est une translation de vecteur $2\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$

3-2-EXERCICE

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}} \ \equiv \dfrac{\pi}{3}\left[2\pi\right]$, soit I milieu de $\left[BC\right]$ et J un point tel que B milieu de $\left[JC\right]$. soient r_A la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et r_B la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{-2\pi}{3}$

1-Soient A' et B' les images respectives des points A et B par l'application $r_B \circ r_A$, montrer que I est milieu du segment $\left[AA'\right]$, et B est milieu du segment $\left[AB'\right]$

2- déterminer la nature de l'application $r_B \circ r_A^{-1}$

3-montrer que pour tout M du plan (P), I est milieu du segment $\left[M_1M_2\right]$ tel que :

$r_A(M) = M_1$ et $r_B(M) = M_2$

4-montrer que l'application $r_B \circ r_A$ est une rotation en indiquant son centre et son angle