

LE BARYCENTRE

1-BARYCENTRE DE DEUX POINTS

1-1-POINT MASSIF

DEFINITION

Soit A un point du plan, et α un réel. Le couple (A, α) est appelé point massif ou point pondéré, et on dit α est la masse de A

1-2-BARYCENTRE DE DEUX POINTS MASSIFS

a-DEFINITION

Soient (A, α) et (B, β) deux points massifs tels que : $\alpha + \beta \neq 0$, il existe un point unique G tel que : $\alpha \overrightarrow{GB} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$. le point G est appelé le barycentre des point massif (A, α) et (B, β)

b-EXERCICE

1- Soit G le barycentre des points massifs $(A, 2)$ et $(B, 3)$

Calculer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, puis construire le point G

2- Soient A, B et C trois points du plan tels que : $2\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

Montrer que B est le barycentre de (A, a) et (B, b) en déterminant a et b

1-3-PROPRIETE

Le barycentre ne change pas si l'on multiplie tous les masses par un même réel non nul

Si G est le barycentre de (A, a) et (B, b) , alors G est le barycentre de (A, ca) et (B, cb) où c est un réel non nul

1-4-PROPRIETE CARACTERISTIQUE

Soit G le barycentre de (A, α) et (B, β) avec $\alpha + \beta \neq 0$. Pour tout point M du plan on a :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{MB}$$

En particulier si $M=O$ on a : $\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{OB}$

1-5-COORDONNEE DU BARYCENTRE

Considérons le plan (P) muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et soit G le barycentre de (A, α) et (B, β)

tel que : $\alpha + \beta \neq 0$. si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ alors $x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}$; $y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$

1-6-EXERCICE

1- soit ABC un triangle et soit I le milieu de [AB]. Le point E est le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2)$.

Le point F est le barycentre de $(B, -1)$ et $(C, 2)$. Montrer que $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{IE}$, construire E et F

2- soient A et B deux points distincts, et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$

a- montrer qu'il existe un point unique M tel que $\overrightarrow{MA} = (\alpha + 1)\overrightarrow{MB}$

b-montrer qu'il existe un point unique N tel que $\overrightarrow{NA} = -(\alpha + 1)\overrightarrow{NB}$

c- soit le point O milieu de [AB], montrer que $\overrightarrow{OM} = \left(1 + \frac{2}{\alpha}\right)\overrightarrow{ON}$

3-le plan (P) est muni d'un repère $O, \vec{i}, \vec{j}$. considérons les points A(1,1), B(2,5) et C(5,2) et soit H le barycentre de $(B, 2)$ et $(C, -1)$

LE BARYCENTRE

a- calculer les coordonnées de H puis construire H

b-soit K un point tel que H est le barycentre de (A,1) et (K,-2), calculer les coordonnées de K

c-montrer que (BK) // (AC)

2-BARYCENTRE DE TROIS POINTS

2-1-DEFINITION

Soient A, α , B, β et C, γ trois points massifs, tels que : $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, il existe un point unique G tel que $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. le point G est appelé le barycentre des points A, α , B, β et C, γ

2-2-EXERCICE

Soit ABC un triangle, et G le barycentre de (A,2), (B,-3) et (C,2).

a- calculer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b-construire G

2-3-PROPRIETE

Le barycentre ne change pas si l'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul

2-4-PROPRIETE CARACTERISTIQUE

Soit G le barycentre des points A, α , B, β et C, γ . pour tout point M du plan (P) on a :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{MB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{MC}$$

En particulier si M=O, on a : $\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{OC}$

2-5-PROPRIETE D'ASSOCIATIVITE

Soit G le barycentre de A, α , B, β et C, γ avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

Si $\alpha + \beta \neq 0$ et H le barycentre de A, α et B, β , alors G est le barycentre de

$H, \alpha + \beta$ et C, γ

Démonstration

2-6-EXERCICE

On considère le triangle ABC, on note G le barycentre de (A,3), (B,1) et (C,-2)

a- déterminer H le barycentre de (A,3) et (B,1)

b- déterminer K le barycentre de (A,3) et (C,-2)

c-déterminer L le barycentre de (B,1) et (C,-2)

d-déduire que G est l'intersection des droites (HC), (KB) et (AL)

2-7-COORDONNEE DE BARYCENTRE DE TROIS POINTS

Considérons le plan (P) muni d'un repère $O, \vec{i}, \vec{j}$. Soit G le barycentre de

A, α , B, β et C, γ tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Si $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ alors

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

2-8-EXERCICE

1-Soit ABC un triangle. On considère les points E,F et G définies par : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$

LE BARYCENTRE

$$\overrightarrow{BF} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

a-montrer que A,F et G sont alignés

b-montrer que G est le barycentre de (A,1), (B,-1) et (C,3)

c- montrer que (AB)//(GC)

2-Soit ABC un triangle , E est le symétrique de A par rapport à B , F milieu de [AC] et I milieu de [CE]

a-montrer que I est le barycentre de (A,1), (B,-2) et (C,-1)

b-soit J le barycentre de (A,5), (B,-2) et (C,-1), montrer que les points A,I et J sont alignés

c-soit G le centre de gravité du triangle ABC, montrer que G est le centre de gravité du triangle AIF

3-Soit ABC un triangle, G est le barycentre de (A,1), (B,2) et (C,-3/2), et I un point tel que

$$\overrightarrow{AI} = \frac{4}{3} \overrightarrow{AB}$$

a-montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{3} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et déduire la nature du quadrilatère ACIG

b-soit J le point d'intersection de (IG) et (BC), calculer $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$

c-montrer que $\overrightarrow{GJ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$,et déduire que G est le barycentre de (C,-2), (J,3) et (A,2)

3-BARYCENTRE DE QUATRE POINTS

3-1-DEFINITION

Soient A, α , B, β , C, γ et D, λ quatre points massifs tels que $\alpha + \beta + \gamma + \lambda \neq 0$. il existe un unique point G tel que : $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} + \lambda \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. le point G est appelé le barycentre de A, α , B, β , C, γ et D, λ

3-2-EXERCICE

Soit ABCD un quadrilatère convexe, G le barycentre de (A,2) ; (B,-3) ; (C,2) et (D,5)

a- déterminer H le barycentre de (A,2) et (B,-3)

b- déterminer K le barycentre de (C,2) et (D,5)

c- déduire que G, H et k sont alignés et construire G