LA DERIVEE

HISTOIRE

NEWTON : (1643-1727) ; calcul de la vitesse instantanée d'un corps en chute libre au bout d'une seconde. La vitesse ne dépend pas de la masse si on néglige le frottement de l'air.
GALILEE : (1564-1642) a déterminé l'équation horaire d'un corps en chute libre :

$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 = 5t^2$ .la vitesse instantanée en t=1s est : $v(1) = \frac{z(1+dt) - z(1)}{dt} = 10 + 5dt$

Pour NEWTON la vitesse v(1)=10m/s en prenant dt=0. PROBLEME ?
Le problème est résolu au 19 siècle en introduisant la notion de limite

1-LE NOMBRE DERIVEE

1-1-DEFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et a un élément de I. on dit que f est dérivable au point a, s'il existe un nombre réel L tel que :

$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L \quad ou \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$. le nombre L est appelé le nombre dérivée de f au point a, on le note : $f'(a)$

1-2-EXEMPLE

Soit $f(x) = x^2 - 3x + 5 \quad et \qquad a = 2$

1-3-EXERCICE

Calculer le nombre dérivée de f au point a dans les cas suivants

i- $f(x) = \frac{2x}{x+1} \quad et \qquad a = -2$

ii- $f(x) = \sqrt{3x+4} \qquad et \qquad a = -1$

1-4-APPROCHE D'UNE FONCTION DERIVABLE PAR UNE FONCTION AFFINE

a-DEFINITION

Soit une fonction f dérivable en a, si x est une valeur approchée de a alors $f(a) + (x-a)f'(a)$ est une valeur approchée de f(x). la fonction $h(x) = f(a) + (x-a)f'(a)$ est appelée la fonction affine tangente de f en a

b-EXEMPLE

Soit $f(x) = x^2$ calculons $f(2,000001)$

On a $f'(2) = 4$ donc la fonction affine tangente en 2 est $h(x) = 4 + 4(x-2)$ et $f(2,00001) \approx h(2,00001) = 4,00004$

1-5-INTERPRETATION GEOMETRIQUE DU NOMBRE DERIVEE

a-DEFINITION

Soit f une fonction dérivable en a et C_f sa courbe représentative. La droite (T) d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ est appelée la tangente à la courbe C_f au point (a,f(a))

b-EXEMPLE

Soit $f(x) = x^2$, a=1

2-DERIVEE A DROITE-DERIVEE A GAUCHE

2-1-DEFINITION

i-soit f une fonction définie sur [a,b], on dit que f est dérivable à droite de a s'il existe un nombre réel L, tel que $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$ ou $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$, le nombre L est appelé, la dérivée à droite de f au point a , on le note $f'_d(a)$, et la courbe C_f admet une demi-tangente à droite au point a d'équation $y = f_d'(a)(x-a) + f(a)$

ii- soit f une fonction définie sur [c,a], on dit que f est dérivable à gauche de a s'il existe un nombre réel L, tel que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$, le nombre L est appelé, la dérivée à gauche de f au point a , on le note $f_g'(a)$, et la courbe C_f admet une demi-tangente à gauche au point a d'équation $y = f_g'(a)(x-a) + f(a)$

2-2-EXEMPLE

Soit $f(x) = x\left|x-2\right|$, a=2

2-3-PROPRIETE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et a un élément de I. f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche de a, et $f_g'(a) = f_d'(a)$

2-4-EXERCICE

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x^3 - 4x & x \leq 1 \\ f(x) = x^2 - 3x - 1 & x > 1 \end{cases}$

1- étudier la limite à droite et à gauche de f au point 1

2- étudier la dérivabilité à droite et à gauche de f au point 1

3- LA DERIVABILITE SUR UN INTERVALLE

3-1-DEFINITION

i- On dit que f est dérivable sur un intervalle ouvert I, si f est dérivable en tout point de I

ii- Soit f une fonction dérivable sur I, et soit x un élément de I. la fonction qui fait correspondre x à f'(x) est appelée la fonction dérivée de f sur I, et on la note f' telle que :

$$f' : \quad \begin{aligned} I &\to \mathbb{R} \\ x &\to f'(x) \end{aligned}$$

3-2-EXEMPLE

$i - f(x) = x \qquad ii - f(x) = x^2 \qquad iii - f(x) = \frac{1}{x}$

3-3-DERIVEE DES FONCTIONS ELEMENTAIRES

$f(x)$	$a \quad a \in \mathbb{R}$	x	x^n $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sin x$	$\cos x$
$f'(x)$	0	1	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$

3-4- OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVEES

a-PROPRIETE

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I, et k un réel, on a

i- f+g est dérivable sur I, et $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

ii- kf est dérivable sur I, et $(kf)'(x) = kf'(x)$

iii- fg est dérivable sur I, et $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

iv- pour tout entier naturel n non nul, on a : $(f^n)'(x) = n \times f^{n-1}(x) \times f'(x)$

v- si $\forall x \in I \qquad f(x) \neq 0$ alors $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^{\ 2}}$

vi- si $\forall x \in I \qquad g(x) \neq 0$ alors $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^{\ 2}}$

vii- si $\forall x \in I \qquad f(x) > 0$ alors $\sqrt{f(x)}\ ' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

<u>b-EXERCICE</u>

Calculer la dérivée de f dans les cas suivants :

i- $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + \frac{5}{x} - \sqrt{7}x - \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{6}$

ii- $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$

iii- $f(x) = \ 2x + 3\ \sqrt{3x^2 + 5x}$

iv- $f(x) = \ 3x^4 - 5x\ ^{5}$

v- $f(x) = \frac{1}{x^4 - 5x^2 + 7}$

vi- $f(x) = \frac{3x^2 - 5x}{3x + 4}$; $\qquad f(x) = \tan x$

<u>c-PROPRIETE</u>

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux réels et soit J un intervalle ouvert tel que $\forall x \in J \qquad ax + b \in I$. la fonction $f(x) = u(ax + b)$ est dérivable sur I et sa dérivée est : $f'(x) = au'(ax + b)$

<u>Exercice :</u>

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \sin(3x + 2)$

<u>4-LES VARIATIONS D'UNE FONCTION DERIVABLE</u>

<u>4-1-PROPRIETE</u>

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

i- f est croissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I \qquad f'(x) \geq 0$

ii- f est décroissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I \qquad f'(x) \leq 0$

iii- f est constante sur I si et seulement si : $\forall x \in I \qquad f'(x) = 0$

<u>4-2-EXEMPLE</u>

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 5$; $\qquad f(x) = x^3$

<u>4-3-DERIVEE ET EXTREMUM D'UNE FONCTION</u>

<u>a-PROPRIETE</u>

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

Si f admet un extremum au point a alors $f'(a) = 0$

<u>b-EXERCICE</u>

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 2$

5-DERIVEE SUCCESSIVES- EQUATIONS DIFFERENTIELLES

5-1-DERIVEE SUCCESSIVE

a-DEFINITION

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, et f' sa dérivée sur I. Si f' est dérivable sur I , alors sa dérivée (f')' est appelée la dérivée seconde de f sur I, on la note par : f'' ou $f^{(2)}$

b-EXEMPLE

soit $f(x) = \sin(2x)$; $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

5-2-EQUATION DIFFERENTIELLE

a-PROPRIETE

i- Soit ω un nombre réel non nul, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y'' + \omega^2 y = 0$ est formé des fonctions f définie par : $f(x) = a\cos(wx) + b\sin(wx)$ où a et b sont des réels

ii- Soit a un nombre réel non nul, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y' + ay = 0$ est formé des fonctions f définies par : $f(x) = ke^{-ax}$ où $e \approx 2.7$

EX1

Soit $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x-1} \quad , & x \leq 0 \\ f(x) = -2\sin\dfrac{x}{2}, & x > 0 \end{cases}$

1- calculer les limites au voisinage de 0

2-étudier la dérivabilité de f au voisinage de 0

3-en déduire les demi-tangentes au point 0

EX2

Soit $f(x) = \dfrac{x^2 - |x| - 2}{x - 2|x-1|}$

1- déterminer D_f et calculer les limites de f au voisinage de $\pm\infty$

2- calculer les limites de f au voisinage de 2 et 2/3

3- étudier la dérivabilité de f au point 0

5- étudier la dérivabilité de f au point 1

EX3

Soit $f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 + 1}$

1-déterminer D_f et calculer les limites de f au voisinage de $\pm\infty$

2-a- montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1}}$$

b- étudier le signe de f' selon le signe de x

c- donner le tableau de variation de f

EX4

Soit $I = [0, +\infty[$

1- f est définie sur I par : $f(x) = x - \sin x$

a- calculer f'(x) et donner TV

b- déduire le signe de f(x)

2-g est définie sur I par :

$$g(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$$

a-calculer g'(x) et donner TV

b- déduire le signe de g(x)

3- soient $h(x) = -x + \dfrac{x^3}{6} + \sin x$ et

$$k(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x$$

a- montrer que : h'(x)=g(x) et k'(x)=h(x)

b- déduire que

$h(x) \geq 0 \qquad et \qquad k(x) \geq 0$

4- en déduire que : $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ et

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

5-en déduire pour tout x>0 un encadrement de $\dfrac{\sin x}{x}$ et de $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

6- déduire : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

EX5

1-Soit f une fonction dérivable au point 2 tel que f(2)=-2 et f'(2)=1

calculer $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2\sqrt{4x+1} + 3f(x)}{x-2}$

2- Soit f un fonction dérivable au point 0 tel que f'(0)=a, calculer en fonction de a

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2x) - f(3x)}{x}$$

EX6

Soit $f(x) = \sin 2x$

1- calculer f''(x) et déduire que f est une solution de l'équation différentielle

$y'' + 4y = 0$

2- calculer $f^{(3)}$, $f^{(4)}$

3- montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f^{(n)}(x) = 2^n \sin(2x + n\frac{\pi}{2})$$

EX7

Soit n un entier tel que n>2, soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1+x}{n}\right)^n$$

1-montrer que :

$$f'(x) = \frac{1}{nx^2}\Big[(n-1)x - (n+1)\Big]\left[1 + \frac{1+x}{n}\right]^{n-1}$$

2-donner TV

3- en déduire que : $\forall x > 0$

$$\left(1 + \frac{1+x}{n}\right)^n \geq x\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$$